

Area Automatica - Ausilio Didattico www

Metodo nello spazio degli stati / Sistemi tempo discreto / Tecniche di controllo digitale

Giugno, 1997

Domenico Prattichizzo

In queste pagine gli studenti interessati possono trovare alcune note su argomenti relativi ai corsi di Automatica e molti esempi ed esercizi di verifica della preparazione. Sono inoltre disponibili degli esercizi con relativo codice Matlab per la verifica dello svolgimento. Negli esercizi e/o esempi etichettati con il simbolo ***iM*** e' possibile trovare gli ***script Matlab*** che possono essere semplicemente lanciati dal prompt di Matlab usando la funzionalita' **drag and drop**.

Tramite ftp e' possibile trasferire sul proprio PC le versioni post-script delle dispense dei Corsi.

Al fine di migliorare le funzionalita' di questo sito, gli studenti possono rivolgersi direttamente a

Domenico Prattichizzo

prattichizzo@ing.unisi.it

Metodo dello Spazio degli Stati (elaborazione appunti dei corsi)

Sistemi Tempo Discreto (elaborazione appunti dei corsi)

Tecniche di Controllo Digitale (elaborazione appunti dei corsi)

Alcuni Esercizi Matlab ~ Drag and Drop

iM-Esempio: periodo di campionamento

iM-Esempio: Confronto tra la MZT e la trasformata di Tustin

iM-Esempio: sintesi del controllore (dal tempo continuo al tempo discreto)

iM-Esempio: Teorema del campionamento di Shannon - Aliasing

iM Sintesi del controllore: un esempio completo

 [homepage](#)

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [Introduzione al metodo dello](#)

- [Introduzione al metodo dello spazio di stato](#)
 - [Introduzione](#)
 - [Concetto di variabili di stato e di spazio di stato](#)
 - [Rappresentazione dei sistemi nello spazio di stato](#)
 - [Osservabilità e controllabilità](#)
 - [Dalla rappresentazione nello spazio di stato alla funzione di trasferimento](#)
 - [Dalla F.d.T. alla rappresentazione nello spazio di stato. Rappresentazioni canoniche](#)
 - [Trasformazione di stato](#)
 - [Studio della stabilità di un sistema lineare autonomo](#)
 - [Sintesi \(progetto\) del regolatore mediante retroazione stato-ingresso \(allocazione dei poli\)](#)
 - [Osservatori](#)
 - [Osservatore di ordine pieno \(ordine completo\)](#)
 - [Regolatore mediante retroazione stato-ingresso ed osservatore di ordine completo](#)
 - [About this document ...](#)
-

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [Introduzione](#) Up: [No Title](#) Previous: [No Title](#)

Introduzione al metodo dello spazio di stato

- [Introduzione](#)
 - [Concetto di variabili di stato e di spazio di stato](#)
 - [Rappresentazione dei sistemi nello spazio di stato](#)
 - [Osservabilità e controllabilità](#)
 - [Dalla rappresentazione nello spazio di stato alla funzione di trasferimento](#)
 - [Dalla F.d.T. alla rappresentazione nello spazio di stato. Rappresentazioni canoniche](#)
 - [Trasformazione di stato](#)
 - [Studio della stabilità di un sistema lineare autonomo](#)
 - [Sintesi \(progetto\) del regolatore mediante retroazione stato-ingresso \(allocazione dei poli\)](#)
 - [Osservatori](#)
 - [Osservatore di ordine pieno \(ordine completo\)](#)
 - [Regolatore mediante retroazione stato-ingresso ed osservatore di ordine completo](#)
-

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)

Next: [Concetto di variabili di](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Introduzione al metodo dello](#)

Introduzione

Nell'ambito della cosiddetta "teoria classica," sono disponibili numerose tecniche di analisi e di sintesi dei sistemi asserviti. In tale ambito la trasformazione di Laplace viene utilizzata per tradurre le equazioni differenziali del sistema (lineari ed a coefficienti costanti) in equazioni algebriche nella variabile complessa $s = \alpha + j\omega$.

Tali equazioni algebriche consentono la determinazione del legame ingresso-uscita che si materializza nella Funzione di Trasferimento $G(s)$. La $G(s)$ diventa quindi la rappresentazione analitica del sistema che può essere analizzato e dimensionato studiando il comportamento della stessa in funzione della variabile complessa s .

Tali tecniche prendono il nome di tecniche "nel dominio della frequenza" e comprendono principalmente le tecniche di Bode, di Nyquist e del luogo delle radici.

Il limite di tali metodologie consiste essenzialmente nella loro esclusiva applicabilità ai sistemi lineari e stazionari. Il loro impiego nello studio dei sistemi a più ingressi e più uscite (MIMO), risulta spesso laborioso.

Le tecniche nel dominio della frequenza costituiscono comunque un potente ed organico strumento di analisi e di sintesi per i sistemi lineari e stazionari ad un ingresso ed una uscita (SISO).

Lo studio dei sistemi MIMO, lineari e stazionari, dei sistemi lineari e non stazionari (rappresentati da equazioni differenziali a coefficienti dipendenti dal tempo) e dei sistemi non lineari, richiede l'utilizzo di metodologie diverse e più generali. Tali tecniche prendono il nome di tecniche "nel dominio del tempo" e costituiscono la cosiddetta **teoria moderna** dei sistemi asserviti. Una sommaria collocazione storico-temporale delle due metodologie può essere così indicata: le tecniche nel dominio delle frequenza si sono sviluppate organicamente nell'arco di tempo circa compreso tra il 1940 ed il 1960 principalmente sotto l'influsso della Seconda Guerra Mondiale (sistemi di puntamento, sistemi radar, etc.), le tecniche nel dominio del tempo si sono sviluppate a partire circa dal 1960 anche sotto lo stimolo della ricerca spaziale.

[next](#)[up](#)[previous](#)

Next: [Concetto di variabili di](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Introduzione al metodo dello](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Rappresentazione dei sistemi nello](#) Up: [Introduzione al metodo dello](#) Previous: [Introduzione](#)

Concetto di variabili di stato e di spazio di stato

Schematicamente un sistema può essere rappresentato dallo schema funzionale o a blocchi:

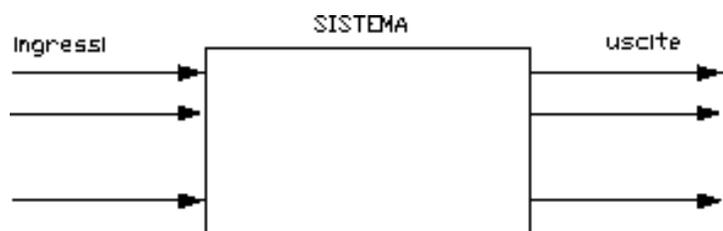


Figure 1.1: Rappresentazione ingresso/uscita di un sistema dinamico.

Le variabili che caratterizzano o sono associate al sistema si possono classificare in:

1. *Variabili d'ingresso o eccitazione:* $i_j(t)$ che rappresentano gli stimoli generati da altri sistemi e che influenzano il sistema considerato, oppure quelle grandezze sulle quali possiamo agire per fare assumere alle uscite l'andamento voluto;
2. *Variabili di uscita:* $u_j(t)$ che descrivono quegli aspetti del comportamento del sistema che interessano l'investigatore e che devono evolvere nel modo desiderato;
3. *Variabili di stato:* $x_k(t)$ che caratterizzano il comportamento dinamico del sistema.

Siano m , n e p rispettivamente il numero degli ingressi, degli stati e delle uscite. Gli insiemi delle variabili di ingresso, di stato e di uscita possono essere rappresentati dai vettori:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \dots \\ i_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_p \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Tali vettori prendono rispettivamente il nome di: vettore d'ingresso, vettore di stato e vettore d'uscita. Le n variabili di stato possono essere considerate come le coordinate di uno spazio ad n dimensioni che prende il nome di **spazio degli stati** o di stato.

Le $x_k(t)$ costituiscono quindi le coordinate di un punto P nello spazio degli stati rappresentativo dello stato del sistema all'istante t . Al variare di t il punto descrive nello spazio di stato una traiettoria che prende il nome di **traiettoria del sistema**.

Da quanto sopra esposto il concetto di variabili di stato o di stato di un sistema dinamico necessita di un opportuno approfondimento in quanto è di fondamentale importanza nella teoria moderna dei sistemi asserviti.

Tale concetto può essere mutuato dalla fisica tenendo conto che alla base della dinamica Newtoniana stà la premessa che l'evoluzione futura di un processo dinamico è interamente determinata dalla conoscenza dello stato presente.

Si consideri, per esempio, un pallone calciato nell'aria. Intuitivamente si avverte che se ne conosciamo la sua posizione e la sua velocità in un certo t_0 , conosciamo anche il suo comportamento futuro (la sua traiettoria per $t > t_0$ e quindi dove cadrà). I vettori $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ rappresentano esattamente le condizioni iniziali necessarie per la soluzione dell'equazione differenziale che ne governa il moto.

Si può ora introdurre una prima definizione di stato di un sistema dinamico:

Definizione 1 lo stato di un sistema dinamico è un insieme di grandezze la cui conoscenza in un certo istante (in assenza di eccitazioni esterne) consente di determinare completamente l'evoluzione futura del sistema.

Una definizione più rigorosa può essere:

Definizione 2 lo stato di un sistema dinamico, in ogni istante t_0 , è il minimo insieme di valori $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$, la cui conoscenza, assieme a quella degli ingressi, per $t \geq t_0$, è sufficiente per la determinazione del comportamento del sistema per tutti i valori di $t \geq t_0$.

La difficoltà nascosta in tali definizioni consiste nel fatto che l'insieme delle grandezze che definiscono lo stato di un sistema non è unico. In molti casi la scelta delle grandezze (variabili di stato) necessarie per la definizione dello stato del sistema risulta ovvia, ma possono presentarsi casi in cui la scelta non è affatto immediata.

Ad ulteriore chiarimento si consideri l'equazione differenziale del 2° ordine:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t)$$

La soluzione può essere ottenuta come somma degli integrali dell'equazione omogenea e dell'equazione completa. In ogni caso la soluzione non sarà completamente determinata senza la conoscenza dei valori delle condizioni iniziali $x(t_0)$ e $\left[\frac{dx}{dt} \right]_{t_0}$

Naturalmente, essendo t_0 completamente arbitrario, risulta che la conoscenza di x e di $\frac{dx}{dt}$ in tempi successivi, assieme alla conoscenza di $f(t)$ negli stessi tempi, consente di conoscere esattamente l'evoluzione dinamica del sistema. Nell'esempio precedente il vettore

$$\begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix}$$

può essere definito come lo stato del sistema.

In generale un sistema di ordine n (rappresentato da una equazione differenziale di ordine n , per la cui soluzione è necessaria la conoscenza di n condizioni iniziali) è descritto da un insieme di n variabili di stato. Nell'esempio precedente risulta $n=2$.

In un sistema del terzo ordine ($n=3$) la conoscenza di x , $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{d^2x}{dt^2}$ è sufficiente per definire il vettore degli stati.

La teoria moderna dei sistemi asserviti dipende quasi completamente dalla rappresentazione di un sistema dinamico di ordine n attraverso n equazioni differenziali di primo ordine.

Verrà mostrato in seguito come tale rappresentazione non sia unica e come esistano infinite possibilità di scelta delle variabili di stato.

Fortunatamente solo alcune di queste possibilità, in particolare quelle che presentano un legame con la realtà fisica del sistema, sono usate con maggiore frequenza.

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [Rappresentazione dei sistemi nello](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Introduzione](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Osservabilità e controllabilità](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Concetto di variabili di](#)

Rappresentazione dei sistemi nello spazio di stato

Un sistema di ordine n , **non lineare e non stazionario**, può essere rappresentato nel seguente modo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{i}(t), t); \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{i}(t), t). \quad (1.3)$$

- Le n equazioni differenziali del primo ordine (1.2) prendono il nome di **equazioni di stato**.
- Le p equazioni differenziali del primo ordine (1.3) prendono il nome di **equazioni di uscita**.

Un sistema **non lineare e stazionario** può essere rappresentato con le seguenti equazioni:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{i}(t));$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{i}(t)).$$

Un sistema **lineare e non stazionario** con:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{i}(t);$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{i}(t).$$

Infine un sistema **lineare e stazionario** avrà una rappresentazione del tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{i}(t); \quad (1.4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{i}(t), \quad (1.5)$$

in cui

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice dei coefficienti o del sistema;

$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è la matrice di comando, di controllo, d'ingresso o di distribuzione degli ingressi;

$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ è la matrice di uscita o di distribuzione delle uscite;

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ è la matrice di trasmissione, ingresso-uscita o del legame algebrico ingresso-uscita.

Si noti che per i sistemi lineari e stazionari le matrici coinvolte nella descrizione del sistema non dipendono dal tempo.

I sistemi stazionari per i quali si abbia $\dot{\mathbf{i}}(t) = \mathbf{0}$ prendono il nome di **sistemi autonomi**.

La presenza del termine $\mathbf{D}\mathbf{i}(t)$ nella (1.5) indica l'esistenza di eventuali collegamenti diretti tra ingressi ed uscite. Poichè tale possibilità è molto rara nei sistemi di controllo (sistemi puramente dinamici) dove, in generale è richiesta, nel passaggio dall'ingresso all'uscita un'amplificazione di potenza, si può assumere che la rappresentazione di un sistema **lineare e stazionario di ordine n** sia data da:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{i}(t); \quad (1.6)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (1.7)$$

Le precedenti equazioni, in forma estesa, diventano:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}i_1 + b_{12}i_2 + \dots + b_{1m}i_m; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}i_1 + b_{22}i_2 + \dots + b_{2m}i_m; \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}i_1 + b_{n2}i_2 + \dots + b_{nm}i_m; \\ \dot{u}_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n; \\ \dot{u}_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n; \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\dot{u}_p = c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \dots + c_{pn}x_n;$$

Le equazioni (1.6) e (1.7) e quelle seguenti rappresentano quindi, nello spazio di stato un sistema **lineare e stazionario** di ordine n a più ingressi (m) e più uscite (p).

Lo studio di un tale sistema con l'uso delle funzioni di trasferimento (teoria classica) avrebbe preso le mosse da una rappresentazione avente la forma:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{i}(s) \quad (1.10)$$

in cui $G(s)$ è una matrice il cui elemento generico $G_{ij}(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento tra il j -esimo ingresso e la i -esima uscita, cioè:

$$G_{ij}(s) = \frac{u_i(s)}{i_j(s)}.$$

La schematizzazione a blocchi di un sistema a due ingressi e due uscite è riportato in figura [1.2](#):

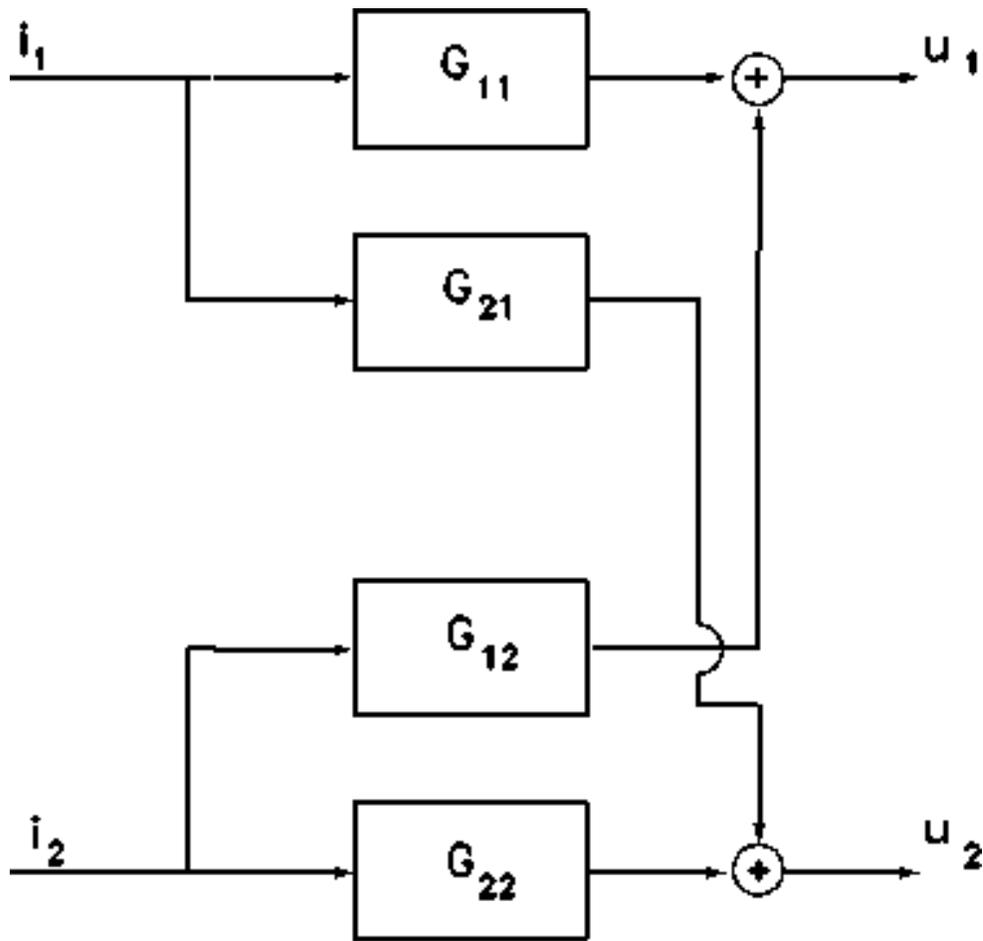


Figure 1.2: Rappresentazione classica di un sistema a due ingressi e due uscite.

Si noti che le frecce larghe indicano la presenza di grandezze espresse da vettori. Anche le [\(1.6\)](#) e [\(1.7\)](#) possono essere rappresentate con uno schema a blocchi come in figura [1.3](#):

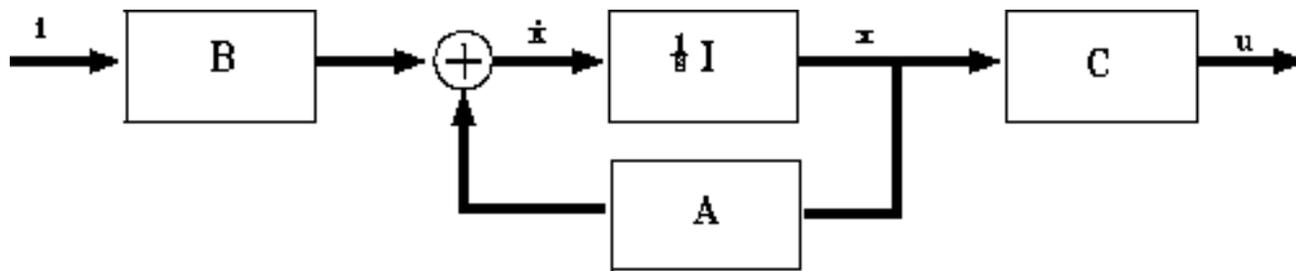


Figure 1.3: Schema a blocchi di un sistema a più ingressi e più uscite nello spazio di stato.

Nel caso di un sistema ad **un ingresso ed una uscita (SISO)** le equazioni (1.6) e (1.7) diventano:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}i; \quad (1.11)$$

$$u = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.12)$$

ed in forma esplicita

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} i \quad (1.13)$$

$$u = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Lo stesso sistema sarà rappresentato, nel dominio delle frequenze, dalla sua funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{u(s)}{i(s)}. \quad (1.15)$$

Gli schemi a blocchi delle due rappresentazioni sono raffigurati nella figura [1.4](#).

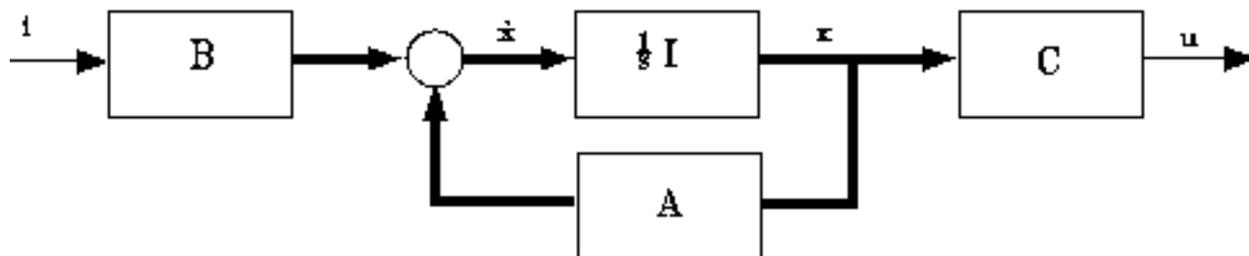
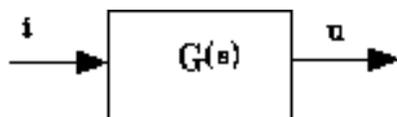


Figure 1.4: Schema a blocchi di un sistema ad un ingresso ed un uscita (SISO). Rappresentazione classica con F.d.T. (in alto) e rappresentazione nello spazio degli stati (in basso).

Le equazioni (1.11), (1.12) e (1.15) rappresentano rispettivamente nel dominio del tempo e nel dominio delle frequenze il sistema controllato che dovrà evolvere, per effetto di un opportuno ingresso, nel modo desiderato.

Nella teoria classica la $G(s)$, come sopra indicato, rappresenta quindi la F.d.T. dell'anello aperto non compensato. Il sistema asservito sarà ottenuto retroazionando l'uscita, confrontandola con il segnale di riferimento e comandando il sistema controllato con l'uscita del regolatore. Nella figura 1.5 sono riportati gli schemi a blocchi di un sistema asservito nella schematizzazione classica (in alto) e nella schematizzazione moderna (in basso).

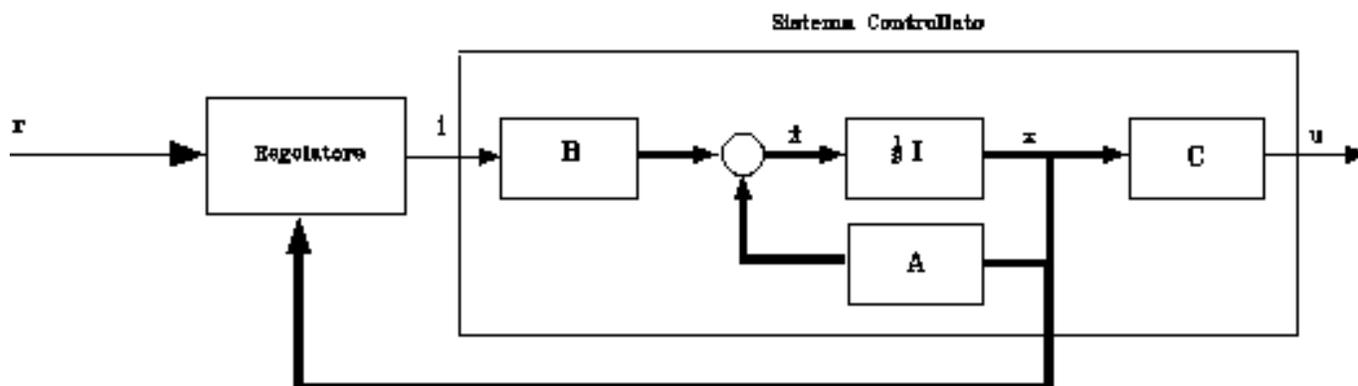
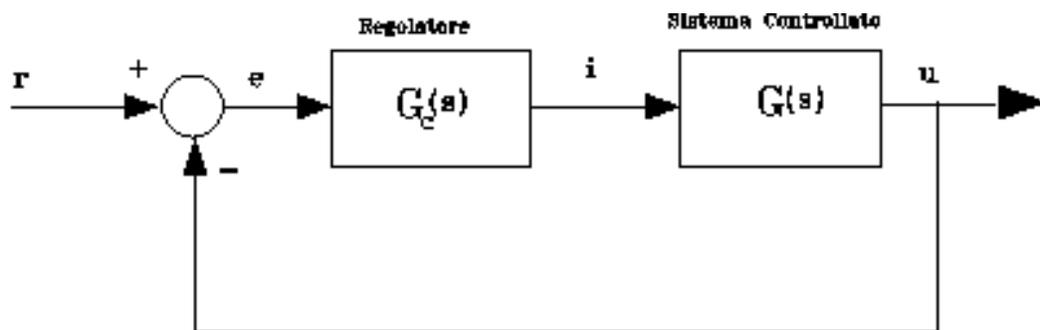


Figure 1.5: Sistema asservito. Schematizzazione classica e schematizzazione moderna.

Come si può notare, nella schematizzazione moderna, il segnale di comando (legge di comando) è generato dal Regolatore utilizzando il segnale di riferimento e lo stato (o una stima di esso, come sarà mostrato più avanti) del sistema controllato.

Da quanto si è visto si può già concludere che la differenza più ovvia tra rappresentazione classica e moderna di un sistema, consiste nel fatto che nella prima non appare lo stato del sistema essendo incentrato esclusivamente sulla relazione ingresso-uscita. La rappresentazione nello spazio di stato fornisce invece anche una descrizione del comportamento interno del sistema considerato.

In particolare la conoscenza dello stato di un sistema fornisce informazioni sulla distribuzione dell'energia all'interno del sistema. Molto spesso infatti la scelta delle variabili di stato cade sulla posizione (energia potenziale) e sulla velocità (energia cinetica) per i sistemi meccanici o su grandezze legate alle potenze elettrica e magnetica per i sistemi elettrici.

A questo punto si pongono due quesiti:

1. Sotto quali condizioni la rappresentazione classica e moderna equivalgono? Ovverossia: quando la F.d.T. rappresenta adeguatamente un sistema?
2. Se le due rappresentazioni sono equivalenti, quali sono le relazioni che le legano?

In particolare il nostro interesse è rivolto alla determinazione della rappresentazione di un sistema nello spazio di stato nota la sua rappresentazione attraverso la F.d.T. Si vedrà che, quando le due rappresentazioni sono equivalenti, esistono infiniti insiemi di variabili di stato che descrivono un sistema di cui sia nota la F.d.T., mentre tutte le rappresentazioni nello spazio di stato di uno stesso sistema sono convertibili in un'unica F.d.T.

Per quanto riguarda il primo quesito, relativo all'equivalenza delle due rappresentazioni, è necessario introdurre e definire due nuovi concetti noti come controllabilità ed osservabilità. Tali concetti verranno illustrati nel paragrafo seguente, mentre al secondo quesito sarà data risposta successivamente.

[next](#)[up](#)[previous](#)

Next: [Osservabilità e controllabilità](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Concetto di variabili di](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Dalla rappresentazione nello spazio](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Rappresentazione dei sistemi nello](#)

Osservabilità e controllabilità

I concetti di osservabilità e controllabilità possono essere definiti ed analizzati solo nell'ambito della rappresentazione di un sistema nello spazio di stato. Tali concetti furono introdotti da Kalman nel 1960 e sono essenziali per verificare la validità della rappresentazione di un sistema dinamico attraverso la F.d.T.

Il concetto di **controllabilità** può essere così enunciato:

Nota 1 Un sistema è detto **controllabile** se, applicando un ingresso opportuno $i(t)$, il suo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ può essere trasferito in un qualsiasi stato finale $\mathbf{x}(t_f)$ in un tempo finito $t_f \geq 0$,

Come appare chiaramente la controllabilità implica che ogni variabile di stato sia *influenzabile* da almeno un componente dell'ingresso.

Il concetto di **osservabilità** può essere così enunciato:

Nota 2 Un sistema è detto **osservabile** se ogni stato $x(0)$ può essere esattamente determinato dalla misurazione dell'uscita (e dalla conoscenza dell'ingresso) in un intervallo di tempo finito $0 \leq t \leq t_f$.

L'osservabilità misura in qualche modo il grado di *visibilità* dello stato dall'uscita.

Kalman definì l'osservabilità avvalendosi del concetto di **sistema duale**. Il duale del sistema descritto dalle equazioni (1.6) e (1.7) è dato da:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{i} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{B}^T \mathbf{x}\end{aligned}$$

considerando il tempo che scorre all'indietro. Kalman dimostrò che studiare l'osservabilità del sistema (1.6), (1.7) corrisponde allo studio della controllabilità del sistema duale sopra definito.

Molto spesso la controllabilità di un sistema può essere determinata esaminando la sua rappresentazione nello spazio di stato o il relativo schema a blocchi. Se esistono stati disaccoppiati dall'ingresso il sistema risulta non controllabile e se esistono degli stati discoppiati dall'uscita il sistema è non osservabile. L'esistenza di condizioni di non osservabilità e non controllabilità conduce al concetto di ripartire l'intero sistema in quattro sottosistemi:

1. Un sottosistema $\mathcal{S}_{c\ o}$ (controllabile ed osservabile);
2. Un sottosistema $\mathcal{S}_{c\ n}$ (controllabile e non osservabile);
3. Un sottosistema $\mathcal{S}_{n\ o}$ (non controllabile ed osservabile);

4. Un sottosistema S_{nn} (non controllabile e non osservabile).

Gilbert (1963) mostrò che tale ripartizione può sempre essere effettuata tramite un'opportuna scelta delle variabili di stato. Il concetto di ripartizione è mostrato graficamente nella figura [1.6](#).

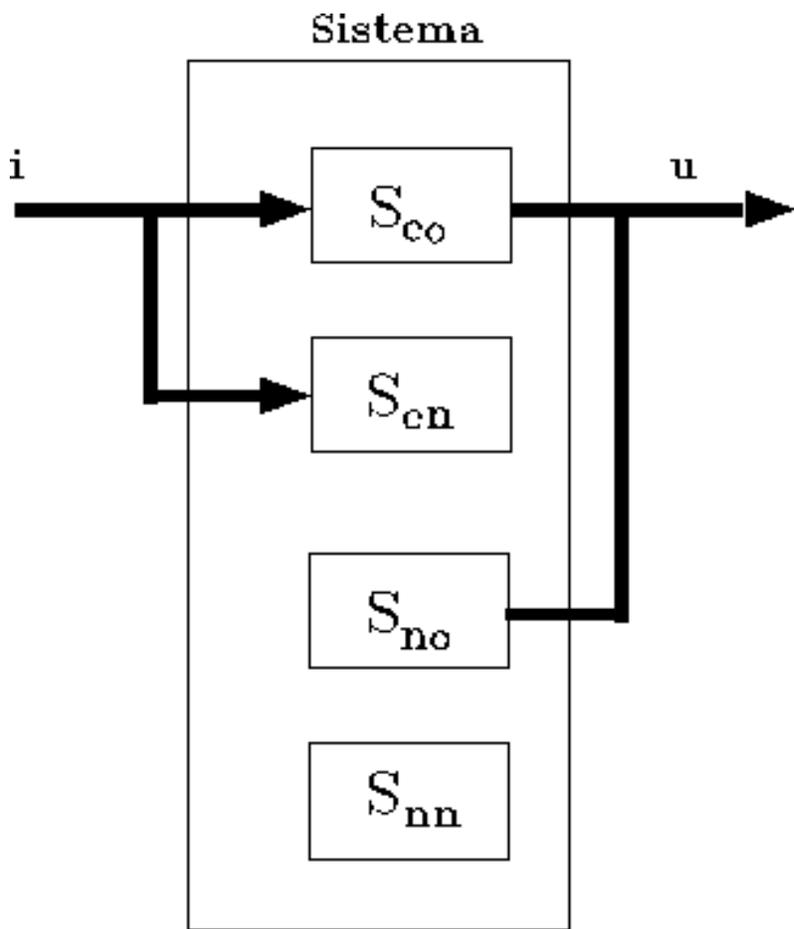


Figure 1.6: Ripartizione di un sistema dinamico in sottosistemi controllabile ed osservabile (co), controllabile e non osservabile (cn), non controllabile e osservabile (no), non controllabile e non osservabile (nn).

Dall'esame della figura [1.6](#) risulta evidente che la F.d.T. $\mathbf{G}(s)$, essendo $\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{i}(s)$, rappresenta solo la porzione controllabile ed osservabile dell'intero sistema. Concludendo quindi si può affermare che:

Nota 3 la F.d.T. costituisce un'adeguata rappresentazione del sistema solo se esso è controllabile ed osservabile. La condizione quindi di equivalenza tra le due rappresentazioni, classica e moderna, dipende dalla controllabilità ed osservabilità del sistema.

Esempio 1 Per illustrare il concetto di ripartizione sopra esposto consideriamo la seguente rappresentazione di un sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} i,$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

La relazione ingresso-uscita di questo sistema, cioè la sua F.d.T. risulta essere:

$$\frac{u(s)}{i(s)} = G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s+1}$$

Si vede dunque che pur essendo il sistema del 3° ordine la sua funzione di trasferimento rappresenta solo il sottosistema controllabile ed osservabile che è del 1° ordine.

La verifica della controllabilità ed osservabilità attraverso l'osservazione del sistema ripartito in sottosistemi può essere eseguita rappresentando il sistema in un metodo particolare ed unico che prende il nome di rappresentazione **di Jordan, modale o diagonale**. Ricondurre un sistema a tale particolare rappresentazione non sempre costituisce un facile compito.

I teoremi seguenti forniscono un modo diretto di verifica della controllabilità ed osservabilità prescindendo dal particolare tipo di rappresentazione nello spazio di stato utilizzata.

Teorema 1 *Il sistema a più ingressi e più uscite di ordine n*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{i}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

risulta

1. *controllabile se e solo se la matrice di controllabilità di dimensione $n \times nm$*

$$\left[\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{b} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right] \quad (1.16)$$

risulta avere rango n e cioè risulta essere di pieno rango riga.

2. *Osservabile se e solo se la matrice di dimensione $n \times np$*

$$\left[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^{T^2}\mathbf{C}^T \mid \dots \mid \mathbf{A}^{T(n-1)}\mathbf{B} \right] \quad (1.17)$$

risulta avere rango n .

Nel caso di un sistema di ordine n ad un ingresso ed una uscita, la controllabilità e l'osservabilità possono essere determinate utilizzando il seguente teorema:

Teorema 2 *Il sistema ad un ingresso ed una uscita di ordine n :*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}i \\ u = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

risulta

1. *controllabile se e solo se la matrice di dimensione $n \times n$*

$$\left[\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{b} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right] \quad (1.18)$$

risulta essere non singolare cioè il suo determinante è diverso da zero.

2. *Osservabile se e solo se la matrice di dimensione $n \times n$*

$$\left[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^{T^2}\mathbf{C}^T \mid \dots \mid \mathbf{A}^{T(n-1)}\mathbf{C}^T \right] \quad (1.19)$$

risulta essere non singolare.

Esempio 2 Applichiamo il Teorema 2 al sistema ad un ingresso ed una uscita dell'Esempio 1 di cui già conosciamo le condizioni di controllabilità ed osservabilità.

Per tale sistema si ha:

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice 1.18, nel caso in esame, ha dimensione 3×3 , ed è

$$\left[\mathbf{b} \mid \mathbf{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{b} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Tale matrice è singolare (avendo una riga nulla) ed è di rango 2. Il sistema risulta quindi non controllabile. Per verificare l'osservabilità si calcoli la matrice 1.19 che assume la forma:

$$\left[\mathbf{C} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C} \mid \mathbf{A}^{T^2}\mathbf{C} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 50 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Anche questa matrice risulta essere singolare e di rango 2. Il sistema è quindi non osservabile.

Dall'esempio 1.8 si può notare che le "direzioni" controllabili nello spazio dello stato sono 2 e che le direzioni non osservabili nello spazio degli stati sono $3-2=1$.

Dai risultati sopra ottenuti si osserva che le matrici 1.20 e 1.21 hanno entrambe rango 2. Risulta quindi evidente che esiste uno stretto legame tra le direzioni controllabili, quelle non osservabili ed il rango delle matrici 1.16 e 1.18.

Dopo aver determinato le condizioni per cui un sistema è controllabile ed osservabile bisogna notare che molti dei sistemi fisici risultano controllabili ed osservabili. Lo studio dei sistemi non controllabili e/o non osservabili presenta alcune difficoltà ed esula dalla presente trattazione.

Avendo esaurito l'argomento relativo all'equivalenza tra le due rappresentazioni di un sistema dinamico, nel seguito verranno individuate le relazioni esistenti tra le due rappresentazioni stesse.

Matlab 1 La proprietà di controllabilità per un sistema dinamico (\mathbf{A}, \mathbf{B}) può essere verificata in MATLAB con il comando

può essere verificata in **MATLAB** con il comando

```
>> ctrb(A, B)
```

che genera la matrice (1.16). A sua volta l'osservabilità può essere studiata con l'istruzione

```
>> obsv(A, C)
```

che restituisce la matrice (1.17).

Con riferimento all'esempio 2, si ricorda che le matrici **A**, **B** e **C** possono essere caricate in memoria con le seguenti istruzioni:

```
>> A = [-1, 0, 0; 0, -3, 0; 0, 0, -5]; B = [1; 1; 0]; C = [1, 0, 2];
```

e che il rango di una generica matrice **M** può essere ottenuto semplicemente con l'istruzione

```
>> rank(M).
```

¹In tutti i richiami alle funzioni Matlab di questi appunti, si fa riferimento anche al toolbox Control di Matlab.

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [Dalla rappresentazione nello spazio](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Rappresentazione dei sistemi nello](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Dalla F.d.T. alla rappresentazione](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Osservabilità e controllabilità](#)

Dalla rappresentazione nello spazio di stato alla funzione di trasferimento

Consideriamo ora il problema della determinazione della F.d.T. di un sistema lineare e stazionario di cui si conosca la rappresentazione nello spazio di stato avente la forma ormai nota [1.6](#), [1.7](#):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{i}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Trasformiamo secondo Laplace le due equazioni assumendo nulle le condizioni iniziali del sistema di equazioni differenziali: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{i}(s) \quad (1.22)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) \quad (1.23)$$

La [1.22](#) può essere messa nella forma:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{i}(s) \quad (1.24)$$

in cui \mathbf{I} è la matrice identica.

Premoltiplicando entrambi i membri della [1.24](#) per $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ si ottiene:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{i}(s).$$

Sostituendo questo risultato nella [1.23](#) si ottiene

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{i}(s) \quad (1.25)$$

Confrontando la [1.25](#) con la [1.10](#) e cioè:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{i}(s)$$

si ottiene

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (1.26)$$

Nel caso di sistema ad un ingresso ed una uscita si ha:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \quad (1.27)$$

La matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ è comunemente chiamata **matrice risolvente** ed è designata col simbolo $\Phi(s)$;

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (1.28)$$

Le 1.26 e 1.27 possono quindi essere formalmente indicate con le seguenti espressioni:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} \quad (1.29)$$

e

$$G(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{b} \quad (1.30)$$

Esempio 3 Consideriamo il sistema ad un ingresso ed un'uscita rappresentato dall'equazione:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

In questo caso la matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ risulta

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 3 & s + 4 \end{bmatrix}$$

e la sua inversa:

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} s + 4 & 2 \\ -3 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 6}$$

dove con $\text{adj}(\mathbf{M})$ si è indicata la matrice aggiunta della generica matrice \mathbf{M} . La funzione di trasferimento del sistema è quindi

$$G(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{b} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 6} = \frac{2}{s^2 + 4s + 6}.$$

Dall'esempio precedente emerge che il polinomio a denominatore della $\mathbf{G}(s)$, a meno di cancellazioni con il numeratore, è uguale al determinante della matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Ne consegue che i poli della F.d.T. $G(s)$ sono sempre un sottoinsieme degli autovalori della matrice dinamica \mathbf{A} . Si noti che se la descrizione nello spazio dello stato del sistema è

controllabile ed osservabile (forma minima), allora i poli della F.d.T. coincidono esattamente con gli autovalori della matrice dinamica \mathbf{A} .

Esempio 4 La figura 1.7 mostra lo schema a blocchi del sistema dell'esempio 3 con i passaggi successivi di riduzione che conducono alla funzione di trasferimento: La disponibilità di un software opportuno, tipo MATLAB,

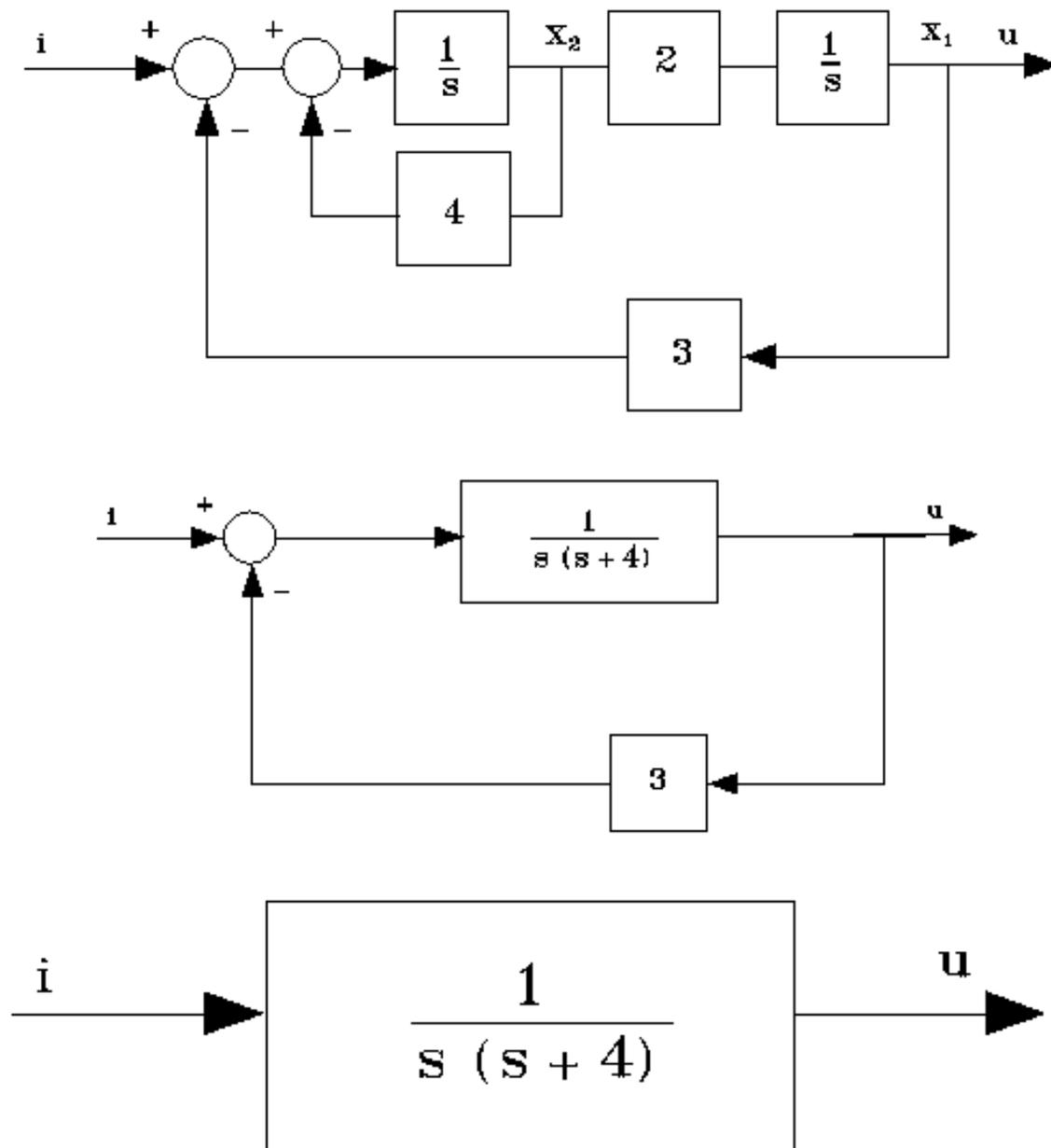


Figure 1.1: Riduzione dello schema a blocchi.

rende ovviamente il compito molto più agevole. Quanto visto nei precedenti esempi 3 e 4 può essere risolto con MATLAB usando le seguenti istruzioni:

`>> [A,B,C,D] = ss(1,0,0,0); % [a11] a12 [b1] b2; % [c1] c2; % [d1] d2; % [A B C D]`

```
>> A = [0, 4; -3, -4]; B = [0; 1]; C = [1, 0]; D = 0; [num, den] = ss2tf(A, B, C, D)
```

ottenendo:

$$\text{num} = [0 \ 0 \ 2] \text{den} = [1 \ 4 \ 6]$$

La $G(s)$ sarà quindi:

$$\frac{2}{s^2 + 4s + 6}$$

Il problema inverso (rispetto a quanto sopra mostrato) della rappresentazione nello spazio di stato di un sistema di cui sia nota la F.d.T. può presentare più difficoltà dato l'infinito numero delle possibili scelte.

E' da sottolineare che, avendo assunto che il sistema sia controllabile ed osservabile, è sempre possibile verificare la validità della rappresentazione nello spazio di stato adottata controllando che la F.d.T. relativa a tale rappresentazione corrisponda a quella di partenza.

[next](#)[up](#)[previous](#)

Next: [Dalla F.d.T. alla rappresentazione](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Osservabilità e controllabilità](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Trasformazione di stato](#) Up: [Introduzione al metodo dello](#) Previous: [Dalla rappresentazione nello spazio](#)

Dalla F.d.T. alla rappresentazione nello spazio di stato. Rappresentazioni canoniche

Dato un sistema, la scelta delle variabili di stato, come già si è evidenziato in precedenza e come meglio sarà mostrato nel seguito, non è unica. Lo stesso sistema può avere quindi infinite rappresentazioni ed essere caratterizzato da un infinito numero di matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} .

Nel seguito potrà essere usata anche la notazione compatta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

per indicare un sistema S o la sua F.d.T.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

Tale proprietà può essere usata per porre le equazioni di stato e quindi le matrici del sistema in forme particolari che possono facilitare lo studio del sistema stesso. Tali forme o realizzazioni prendono il nome di **forme canoniche**. Per maggiore semplicità di esposizione si inizierà con un esempio.

Esempio 5 Si consideri una F.d.T.

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 9s + 20} = \frac{u(s)}{i(s)}.$$

Si può porre:

$$\frac{u(s)x_1(s)}{i(s)x_1(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 9s + 20}$$

e scomporre la F.d.T. in due parti:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{x_1(s)}{i(s)} = \frac{1}{s^2 + 9s + 20}; \\ (b) \quad & \frac{u(s)}{x_1(s)} = s + 3. \end{aligned}$$

Dalle precedenti, passando al dominio del tempo (antitrasformando) si ottiene che

$$\begin{aligned} (a1) \quad & \ddot{x}_1(t) + 9\dot{x}_1(t) + 20x_1(t) = u(t); \\ (b1) \quad & u(t) = \dot{x}_1(t) + 3x_1(t). \end{aligned}$$

Assumendo come variabili di stato: x_1 ed $x_2 = \dot{x}_1$ dalla (a1) si ottengono le equazioni di stato:

$$\int \dot{x}_1 = x_2;$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -20x_1 - 9x_2 + i \end{cases}$$

e dalla (b1) le equazioni di uscita

$$u = 3x_1 + x_2.$$

Le matrici della rappresentazione nello spazio di stato risultano quindi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nulla vieta di cambiare la scelta delle variabili di stato:

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{x}_1 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

(scambiare cioè x_1 con x_2 rispetto alla precedente rappresentazione).

Nell'esempio precedente si sono ottenute dalla stessa funzione di trasferimento due rappresentazioni di cui la seconda è in una delle forme canoniche.

Le forme o realizzazioni canoniche che si incontrano più comunemente sono:

- Realizzazione Canonica del Regolatore (o compagna superiore);
- Realizzazione Canonica dell'osservatore (o compagna sinistra);
- Realizzazione Modale o Diagonale o di Jordan.

Vediamo ora come si ottengono e che struttura hanno le forme canoniche sopra elencate.

Per questo scopo immaginiamo di avere una generica funzione di trasferimento $G(s)$ nella seguente forma (rapporto di polinomi):

In questo caso si otterrebbero le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -9x_1 - 2 - x_2 + i \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

e la seguente equazione di uscita:

$$u = x_1 + 3x_2.$$

Le nuove matrici della rappresentazione risultano quindi

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si è ottenuta, in questo modo, una rappresentazione (o realizzazione) canonica: la realizzazione canonica del regolatore a cui corrisponde lo schema a blocchi della figura del successivo esempio 6.

Con riferimento ai coefficienti $G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$. (1.31) e b_i la forma (o

realizzazione) canonica del regolatore risulta:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (1.31)$$

Si può notare che questa forma canonica si evidenzia per il fatto che nella matrice del sistema i coefficienti del denominatore della $G(s)$ si trovano, cambiati di segno, nella prima riga ed i coefficienti del numeratore costituiscono il vettore di distribuzione dell'uscita. Per esempio la forma canonica del regolatore per un sistema di ordine 3 ($n=3$) sarebbe caratterizzata dalle seguenti equazioni di stato:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_R = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]. \quad (1.32)$$

e dalla seguente equazione di uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \end{aligned}$$

cui corrisponde lo schema a blocchi di figura 1.8:

$$u = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

Figure 1.8: Schema a blocchi della realizzazione canonica del regolatore per un sistema di ordine 3.

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_R = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]. \quad (1.32)$$

Matlab 2 La forma canonica del regolatore è la forma che si ottiene usando l'istruzione:

$$\gg [A, B, C, D] = tf2ss(\text{num}, \text{den}).$$

Ad esempio, data la F.d.T.

$$G(s) = \frac{2s^2 + s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1},$$

le matrici proprie della forma canonica del regolatore possono essere calcolate con le seguenti istruzioni:

$$\gg \text{num} = [2, 1, 1]; \text{den} = [1, 3, 2, 1]; [A, B, C, D] = tf2ss(\text{num}, \text{den})$$

si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [2 \quad 1 \quad 1]; \quad \mathbf{D} = 0$$

Con riferimento ai coefficienti della (1.31), la **forma (o realizzazione) canonica dell'osservatore** assume la forma generale:

Esempio 6 Data la F.d.T. dell'esempio 5:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 9s + 20}$$

determinare le matrici della realizzazione canonica del regolatore e il relativo schema a blocchi.

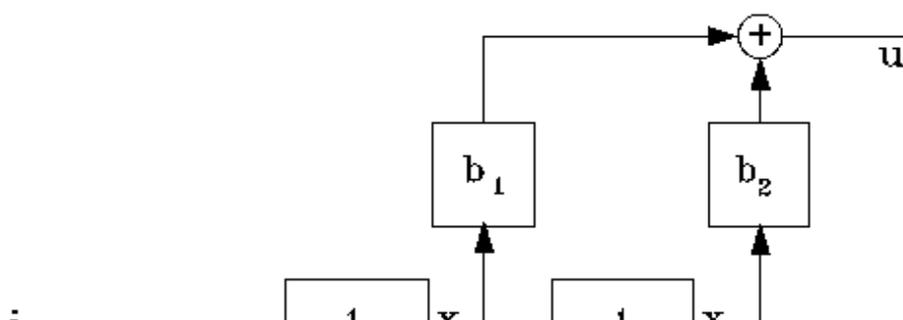
Essendo:

$$a_1 = 9; \quad a_2 = 20; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = 3.$$

Dalle 1.32 e dallo schema a blocchi di figura 1.8, si ottengono le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 3]$$

e lo schema a blocchi in Fig. 1.9. Si può notare che la realizzazione così



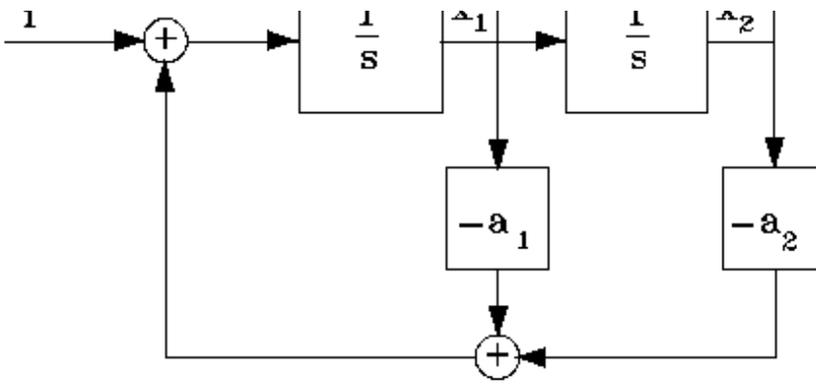


Figure 1.2: Schema a blocchi per l'esempio 6. $a_1 = 9; a_2 = 20; b_1 = 1; b_2 = 3$.

ottenuta $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ coincide con quella dell'esempio 5: $(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{C}_1)$.

Cui corrisponde il diagramma a blocchi di figura 1.10.

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_o = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad \mathbf{D}_o = 0. \quad (1.33)$$

Figure 1.10: Schema a blocchi della forma canonica di osservazione.

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_o = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad \mathbf{D}_o = 0. \quad (1.33)$$

L'ultima forma canonica che studieremo prende il nome di **forma modale, o diagonale o di Jordan**.

La caratteristica di tale forma è di presentare nella matrice \mathbf{A} gli autovalori della stessa collocati sulla diagonale principale. Tutti gli altri elementi della matrice sono nulli.

Supponiamo di avere una F.d.T.  .

Esempio 7 Data la F.d.T. dell'esempio 5:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 9s + 20}$$

determinare le matrici della realizzazione canonica dell'osservatore ed il relativo schema a blocchi. Essendo:

$$a_1 = 9; \quad a_2 = 20; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = 3.$$

Si ha dalla 1.33 e dallo schema a blocchi di fig. 1.10 che le matrici della forma canonica sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e lo schema a blocchi è quello riportato in Fig. 1.11

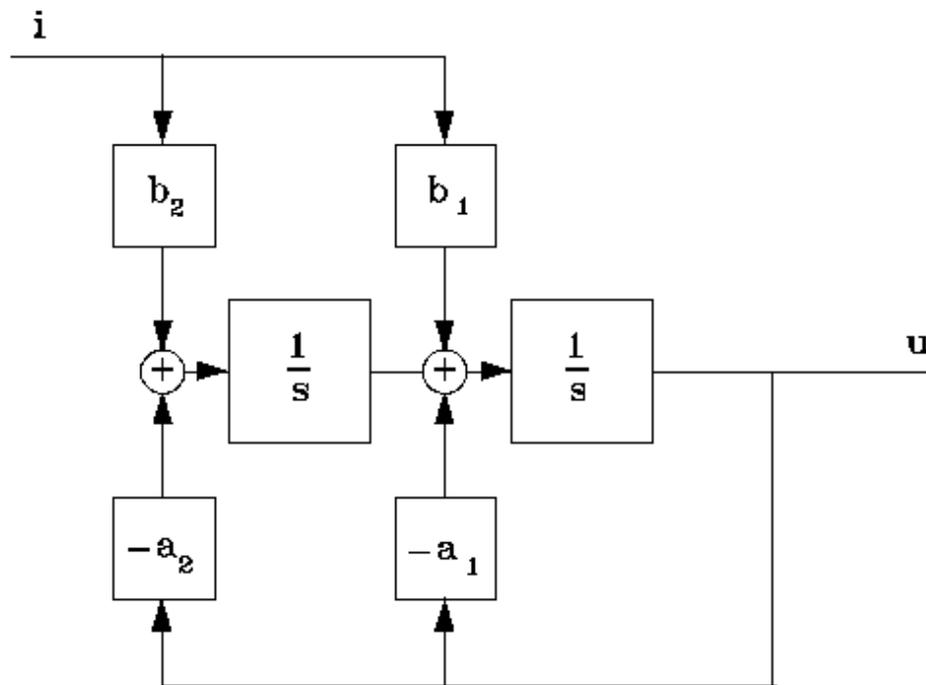


Figure 1.3: Schema a blocchi della $G(s)$ per l'esempio 7.

Si ponga:

Esempio 7 Data la F.d.T. dell'esempio 5:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 9s + 20},$$

determinare le matrici della realizzazione canonica dell'osservatore ed il relativo schema a blocchi. Essendo:

$$a_1 = 9; \quad a_2 = 20; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = 3.$$

Si ha dalla 1.33 e dallo schema a blocchi di fig. 1.10 che le matrici della forma canonica sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

e lo schema a blocchi è quello riportato in Fig. 1.11

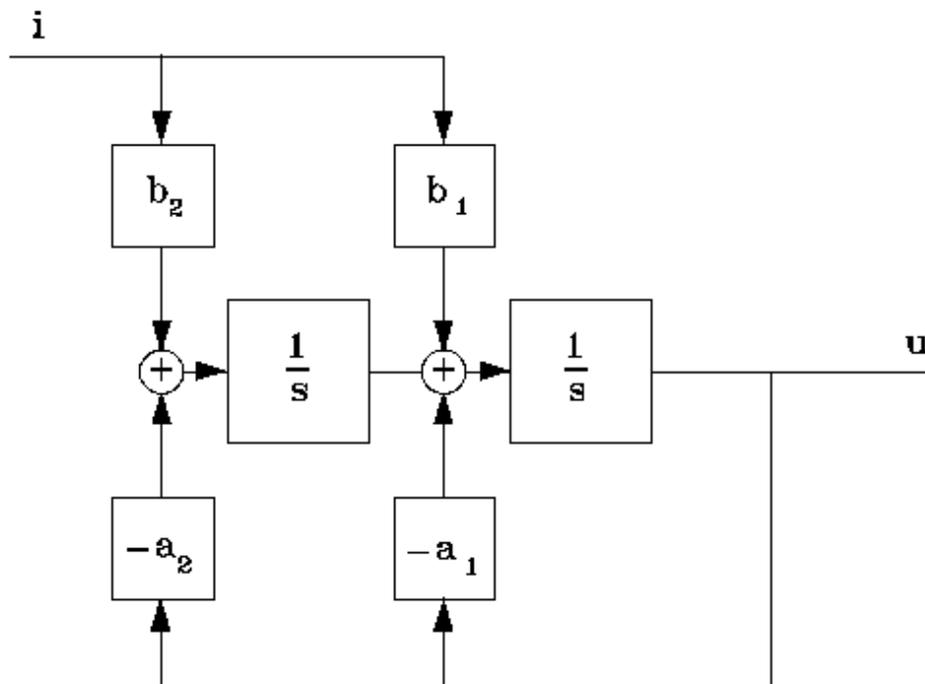


Figure 1.3: Schema a blocchi della $G(s)$ per l'esempio 7.

in cui:

$$\frac{u(s)}{i(s)} = G(s) = R_1 \frac{x_1(s)}{i(s)} + R_2 \frac{x_2(s)}{i(s)} + R_n \frac{x_n(s)}{i(s)} \quad (1.34)$$

La (1.34) diventa:

$$\frac{x_i(s)}{i(s)} = \frac{1}{s - p_1}. \quad (1.35)$$

Le 1.35 e la 1.36, nel dominio del tempo, diventano

Dalla F.d.T. alla rappresentazione nello spazio di stato. Rappresentazioni canoniche

$$u(s) = R_1 x_1(s) + R_2 x_2(s) + R_n x_n(s) \quad (1.36)$$

Le matrici della rappresentazione assumono la forma:

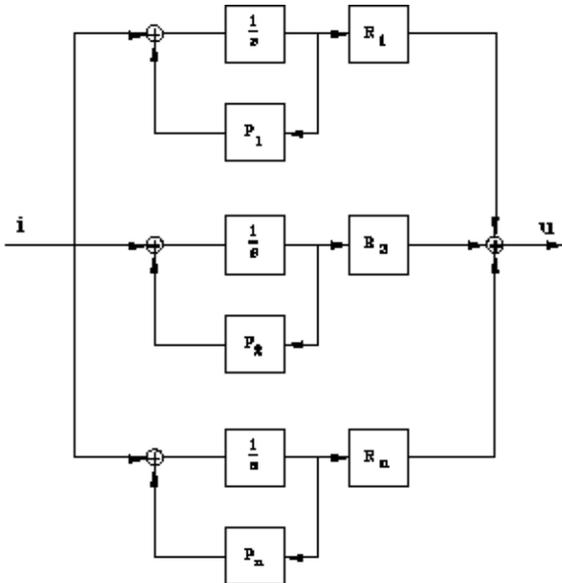
$$u(s) = R_1 x_1(s) + R_2 x_2(s) + R_n x_n(s) \quad (1.36)$$

Lo schema a blocchi di questa forma canonica è riportato in Fig. 1.12.

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_m = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n]. \quad (1.37)$$

Figure 1.12: Schema a blocchi della rappresentazione modale.

Qualora i poli della $G(s)$ non siano tutti semplici e reali la rappresentazione modale richiede ulteriori considerazioni non previste nella presente trattazione. Esempi possono essere ottenuti usando le seguenti istruzioni MATLAB:



$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_m = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n]. \quad (1.37)$$

Le tre realizzazioni descritte nei precedenti esempi si riferiscono alla stessa F.d.T. e quindi descrivono lo stesso sistema. Ci chiediamo ora se è possibile passare direttamente da una realizzazione all'altra senza passare attraverso la F.d.T.? Per rispondere bisogna considerare l'argomento relativo alla trasformazione di stato.

[next](#) [up](#) [previous](#)

Next: [Trasformazione di stato](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Dalla rappresentazione nello spazio](#)

Domenico Prattichizzo
Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Studio della stabilità di](#) Up: [Introduzione al metodo dello](#) Previous: [Dalla F.d.T. alla rappresentazione](#)

Trasformazione di stato

Si consideri il sistema rappresentato dalle equazioni:

Esempio 8 *Dalla F.d.T. dell'esempio 5*

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 9s + 20},$$

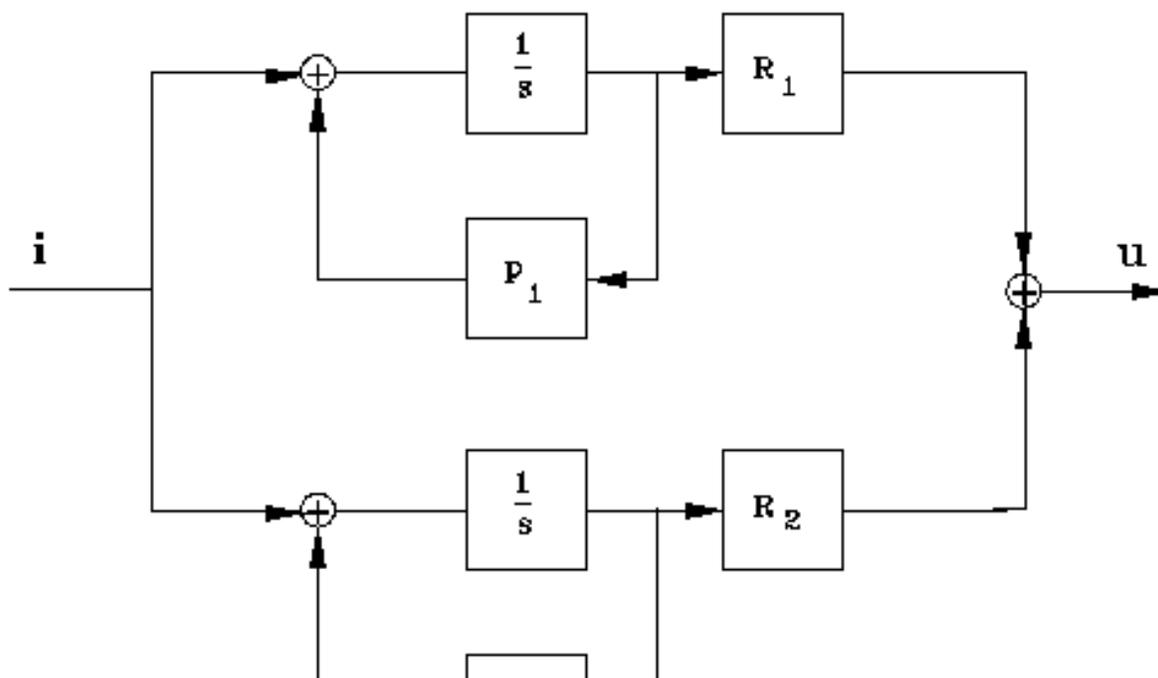
determinare le matrici della realizzazione modale. La $G(s)$ può essere scomposta in fratti semplici² ottenendo:

$$G(s) = \frac{2}{s + 5} + \frac{-1}{s + 4}.$$

Le matrici risultano:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo schema a blocchi è quello riportato in Fig. 1.13



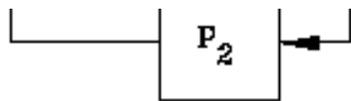


Figure 1.4: Rappresentazione modale della F.d.T. dell'esempio 8. $p_1 = -5$; $R_1 = -2$; $p_2 = -4$; $R_2 = -1$.

²L'operazione di scomposizione può essere effettuata, usando MATLAB, con l'istruzione:

```
>> [R, P, K] = residue(num, den)
```

Le matrici del sistema non sono uniche perchè non è unica la rappresentazione dello stesso sistema. Consideriamo

un cambio delle variabili di stato da $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{i}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{i}. \end{cases}$ a \mathbf{x} ottenuto con una trasformazione lineare

(rappresentata dalla matrice \mathbf{Z}) delle $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{i}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{i}. \end{cases}$. Se la matrice \mathbf{Z} non è singolare (determinante \mathbf{T}) si può scrivere:

$$\neq 0$$

e sostituendo nelle precedenti si ottiene:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$$

Premoltiplicando nella prima per $\mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{i}$ e nella seconda per $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{i}$ si ottiene:

$$\mathbf{T}^{-1}$$

e cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{i}; \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{i}; \end{aligned}$$

Il sistema dinamico nelle nuove variabili di stato diventa 

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{i}; \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{i}. \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_T \mathbf{z} + \mathbf{B}_T \mathbf{i} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_T \mathbf{z} + \mathbf{D}_T \mathbf{i}\end{aligned}$$

Si osservi che poichè le matrici \mathbf{Z} non singolari sono infinite, infinite sono anche le possibili trasformazioni di stato (e quindi le rappresentazioni di uno stesso sistema).

Esempio 8 Dalla F.d.T. dell'esempio 5

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 9s + 20},$$

determinare le matrici della realizzazione modale. La $G(s)$ può essere scomposta in fratti semplici² ottenendo:

$$G(s) = \frac{2}{s + 5} + \frac{-1}{s + 4}.$$

Le matrici risultano:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo schema a blocchi è quello riportato in Fig. 1.13

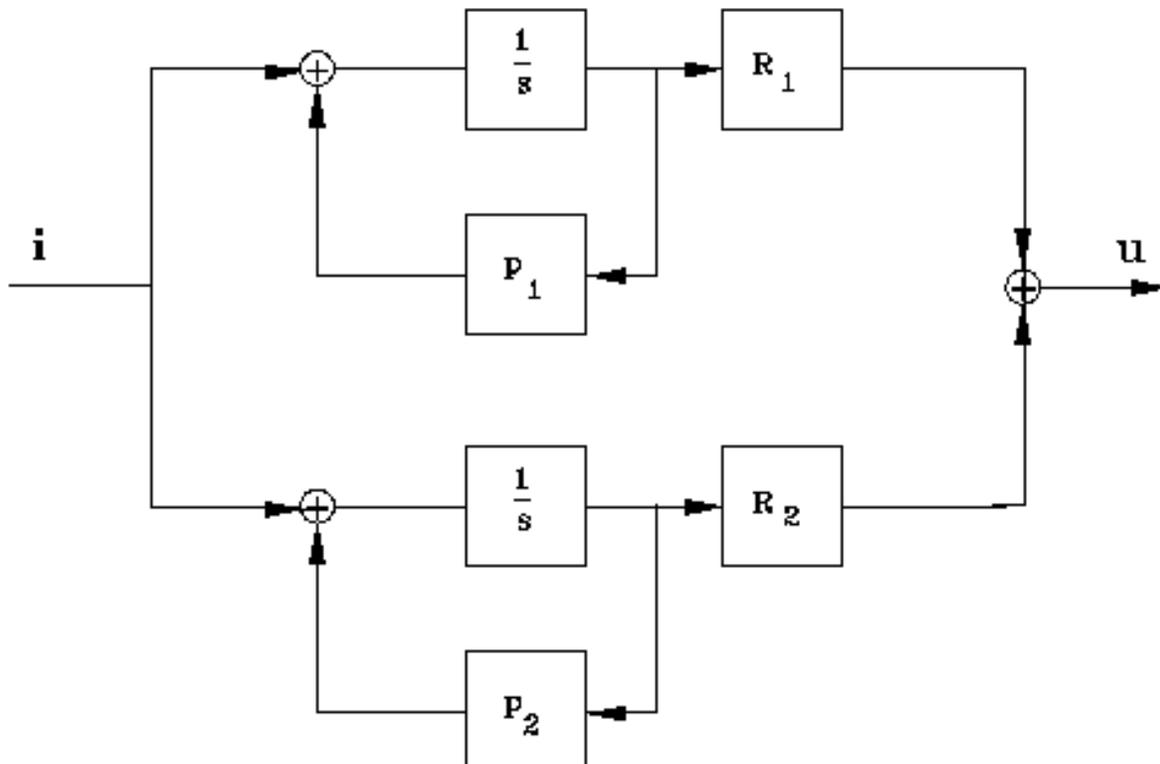


Figure 1.4: Rappresentazione modale della F.d.T. dell'esempio 8. $p_1 = -5$; $R_1 = -2$; $p_2 = -4$; $R_2 = -1$.

²L'operazione di scomposizione può essere effettuata, usando MATLAB, con l'istruzione:

```
>> [R, P, K] = residue(num, den)
```

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Sintesi \(progetto\) del regolatore](#) Up: [Introduzione al metodo dello](#) Previous: [Trasformazione di stato](#)

Studio della stabilità di un sistema lineare autonomo

Consideriamo un sistema autonomo di ordine n . Esso è rappresentato da:

Nota 4 È importante sottolineare che la funzione di trasferimento non è modificata da una trasformazione lineare dello stato.

Se la matrice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (determinante di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$) l'unica posizione di equilibrio (stato di equilibrio)

$\mathbf{A} \neq 0$ si ha per $\dot{\mathbf{x}} = 0$ (origine dello spazio di stato).

Verifichiamo se tale stato di equilibrio è stabile o instabile. A questo scopo si perturbi lo stato del sistema forzando lo stesso in uno stato $\mathbf{x} = 0$ (P_0). Esaminiamo quindi la traiettoria del sistema nella sua evoluzione libera $x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}$.

Trasformando la [1.8](#) si ottiene, tenendo conto delle condizioni iniziali:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$$

ottenendo così un sistema di n -equazioni nelle n incognite

$$\begin{cases} -x_{10} = (a_{11} - s)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ -x_{20} = a_{21}x_1 + (a_{22} - s)x_2 + \dots + a_{2n}x_n; \\ \dots \\ -x_{n0} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - s)x_n, \end{cases}$$

Con la regola di **Cramer** si può quindi ottenere la

$$\begin{cases} -x_{10} = (a_{11} - s)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ -x_{20} = a_{21}x_1 + (a_{22} - s)x_2 + \dots + a_{2n}x_n; \\ \dots \\ -x_{n0} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - s)x_n, \end{cases}$$

$$[x_i] = \frac{\begin{vmatrix} [x_i] \\ (a_{11} - s) & a_{12} & -x_{10} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - s) & -x_{20} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & -x_{n0} & \cdots & (a_{nn} - s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11} - s) & a_{12} & -a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - s) & -a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & (a_{nn} - s) \end{vmatrix}}$$

La stabilità (nessuna coordinata

tendente ad infinito) sarà assicurata se l'equazione caratteristica

$$x_i(t)$$

ha tutte le radici (autovalori di A) con parte reale negativa. In forma compatta quanto sopra assume la forma:

$$\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s)$$

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

La stabilità dipende quindi dalle radici di $\mathbf{x}(s) = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{x}(0)$ (autovalori della matrice dei

coefficienti).

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Osservatori](#) Up: [Introduzione al metodo dello](#) Previous: [Studio della stabilità di](#)

Sintesi (progetto) del regolatore mediante retroazione stato-ingresso (allocazione dei poli)

Il sistema da controllare, rappresentato dalle matrici $\det(sI - \mathbf{A})$ può essere descritto dallo schema in figura [1.14](#) ($D=0$).

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$

Figure 1.14: Schema a blocchi del sistema da controllare.

Nel seguito sarà mostrato come, sotto opportune condizioni, si possa realizzare un regolatore che consente di allocare a piacere i **poli del sistema in anello chiuso**, retroazionando gli stati secondo lo schema in Fig. [1.15](#).

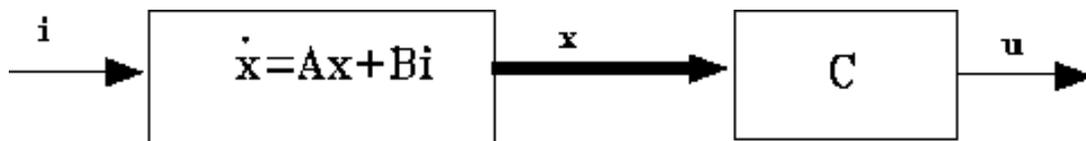


Figure 1.15: Tecnica dell'assegnamento dei poli.

In pratica si opera riportando in ingresso, con segno invertito, un'opportuna combinazione lineare degli stati:

Nota 4 È importante sottolineare che la funzione di trasferimento non è modificata da una trasformazione lineare dello stato.

Si assume che tutti gli stati siano a disposizione e possano essere misurati. In pratica questa ipotesi introdurrebbe notevoli complicazioni pratiche. Procediamo comunque trascurando per il momento questo aspetto. Le equazioni del sistema sono dunque:

$$\dot{i} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

che combinate (sostituendo la seconda nella prima) forniscono:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}i \\ i = -\mathbf{K}\mathbf{x} \end{cases}$$

I poli del sistema in anello chiuso saranno gli autovalori della matrice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{A}_c\mathbf{x}$

ossia le soluzioni di:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Gli autovalori dipenderanno dai valori assunti dal vettore riga $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = 0$.

(1.39). Un'opportuna scelta di tale vettore

consentirà di ottenere per gli autovalori (poli dell'anello chiuso) valori predefiniti (allocazione dei poli nel piano complesso) in funzione del comportamento dinamico dell'anello desiderato.

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = 0. \quad (1.39)$$

L'esempio precedente ci ha mostrato come determinare i guadagni

Esempio 9 *Si abbia un sistema controllato del 2° ordine con smorzamento nullo (2 poli immaginari puri).*

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$$

Tale sistema ha una possibile descrizione nello spazio di stato fornita dalle matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Si desidera realizzare un regolatore stato-ingresso che collochi i poli dell'anello chiuso in posizione tale da ottenere la pulsazione naturale $\omega_n = 2\omega_0$ ed il fattore di smorzamento $\xi = 1$ (due poli reali coincidenti in $-2\omega_0$).

L'equazione caratteristica desiderata dell'anello chiuso sarà:

$$\begin{cases} (s + 2\omega_0)^2 = 0 \\ s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

dalla (1.39) si ottiene che il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ (matrice dei coefficienti del sistema in retroazione) è

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] \right) \right\} = 0$$

ossia

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0. \quad (1.41)$$

Eguagliando i coefficienti nella (1.40) e nella (1.41) si ottiene:

$$\begin{cases} K_2 = & 4\omega_0 \\ \omega_0^2 + K_1 = & 4\omega_0^2 \end{cases} \quad \text{del}$$

da cui:

$$K_1 = 3\omega_0^2; \quad K_2 = 4\omega_0.$$

ossia

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0. \end{bmatrix}$$

vettore riga $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = 0. \quad (1.39)$ per confronto. Tale procedura per sistemi di ordine elevato può presentare qualche difficoltà. L'operazione può essere semplificata se il sistema è

rappresentato nella forma canonica del regolatore. Ricordando la struttura della forma canonica (1.32) e ponendo \mathbf{K}_i ;

$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}$; $\mathbf{B}_R = \mathbf{B}$ si ha (con riferimento alle (1.39) che

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{C}$$

e quindi:

$$\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo l'equazione caratteristica del sistema in anello aperto (1.31)

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} -a_1 - K_1 & -a_2 - K_2 & \cdots & -a_n - K_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

si deduce che l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso è:

Esempio 9 Si abbia un sistema controllato del 2° ordine con smorzamento nullo (2 poli immaginari puri).

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$$

Tale sistema ha una possibile descrizione nello spazio di stato fornita dalle matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Si desidera realizzare un regolatore stato-ingresso che collochi i poli dell'anello chiuso in posizione tale da ottenere la pulsazione naturale $\omega_n = 2\omega_0$ ed il fattore di smorzamento $\xi = 1$ (due poli reali coincidenti in $-2\omega_0$).

L'equazione caratteristica desiderata dell'anello chiuso sarà:

$$\begin{cases} (s + 2\omega_0)^2 = 0 \\ s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

dalla (1.39) si ottiene che il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$

(matrice dei coefficienti del sistema in retroazione) è

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) \right\} = 0$$

ossia

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0. \quad (1.41)$$

Eguagliando i coefficienti nella (1.40) e nella (1.41) si ottiene:

$$\begin{cases} K_2 = & 4\omega_0 \\ \omega_0^2 + K_1 = & 4\omega_0^2 \end{cases}$$

da cui:

$$K_1 = 3\omega_0^2; \quad K_2 = 4\omega_0.$$

ossia

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{bmatrix}$$

Se l'equazione caratteristica "desiderata" per un'opportuna allocazione dei poli è:

$$s^n + (a_1 + K_1)s^{n-1} + (a_2 + K_2)s^{n-2} + \dots + (a_n + K_n) = 0. \quad (1.42)$$

si ottiene, per confronto tra la (1.42) e la (1.43):

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0, \quad (1.43)$$

da cui:

$$a_i + K_i = \alpha_i, \quad (1.44)$$

La determinazione di guadagni

Esempio 9 Si abbia un sistema controllato del 2° ordine con smorzamento nullo (2 poli immaginari puri).

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$$

Tale sistema ha una possibile descrizione nello spazio di stato fornita dalle matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Si desidera realizzare un regolatore stato-ingresso che collochi i poli dell'anello chiuso in posizione tale da ottenere la pulsazione naturale $\omega_n = 2\omega_0$ ed il fattore di smorzamento $\xi = 1$ (due poli reali coincidenti in $-2\omega_0$).

L'equazione caratteristica desiderata dell'anello chiuso sarà:

$$\begin{cases} (s + 2\omega_0)^2 = & 0 \\ s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 = & 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

dalla (1.39) si ottiene che il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ (matrice dei coefficienti del sistema in retroazione) è

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = \det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) \right\} = 0$$

ossia

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0. \quad (1.41)$$

Eguagliando i coefficienti nella (1.40) e nella (1.41) si ottiene:

$$\begin{cases} K_2 = & 4\omega_0 \\ \omega_0^2 + K_1 = & 4\omega_0^2 \end{cases}$$

da cui:

$$K_1 = 3\omega_0^2; \quad K_2 = 4\omega_0.$$

ossia

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0. \end{bmatrix}$$

può essere anche condotta con la formula di Ackermann (1972):

$$a_i + K_i = \alpha_i, \quad (1.44)$$

dove $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(\mathbf{A})$ (1.45) è la matrice di test della controllabilità

$$\mathcal{C}$$

e

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

essendo $\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_n \mathbf{I}$ i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(\mathbf{A}) \quad (1.45)$$

[next](#)
[up](#)
[previous](#)

Next: [Osservatori](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Studio della stabilità di](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Osservatore di ordine pieno](#) **Up:** [Introduzione al metodo dello](#) **Previous:** [Sintesi \(progetto\) del regolatore](#)

Osservatori

La retroazione stato-ingresso descritta nel precedente paragrafo presuppone che tutto il vettore di stato sia disponibile per le misurazioni. Nella maggioranza dei casi ciò risulta complicato se non impossibile sia per motivi pratico-economici (costo dei trasduttori) che per l'impossibilità di misurare alcuni stati del sistema (si pensi ad un impianto nucleare). Il problema può essere risolto con l'uso degli osservatori. Per osservatore si intende un dispositivo (generalmente elettronico) che, avendo lo stesso comportamento dinamico del sistema, rende disponibili le variabili di stato che rappresenteranno una stima

Esempio 10 *Si voglia eseguire il dimensionamento di un regolatore basato sulla reazione stato-ingresso per un sistema con funzione di trasferimento in anello aperto pari a*

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Si desideri allocare i poli dell'anello chiuso in

$$p_1, p_2 = -0.707 \pm j0.707.$$

L'equazione caratteristica desiderata del sistema in anello chiuso sarà quindi

$$\alpha(s) = (s + 0.707 + j0.707)(s + 0.707 - j0.707) = s^2 + 1.4148s + 0.9997$$

quindi

$$\alpha_1 = 1.4148; \quad \alpha_2 = 0.9997.$$

La rappresentazione del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2}$ nello spazio di stato nella forma canonica del regolatore da origine³ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Usando la (1.44) ed essendo $a_1 = a_2 = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} K_1 &= \alpha_1 - a_1 = 1.4148 - 0 = 1.4148; \\ K_2 &= \alpha_2 - a_2 = 0.9997 - 0 = 0.9997. \end{aligned}$$

Con l'uso della formula di Ackermann si ottiene

$$\alpha_c = \mathbf{A}^2 + 1.4148\mathbf{A} + 0.9997\mathbf{I}$$

in cui

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi risulta:

$$\alpha_c = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4148 \\ 0 & 0.9997 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

ed infine

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \alpha_c = [0.9997 \ 1.4148].$$

Si ricorda che in Matlab sono predefinite le funzione "place" e "acker" per l'allocazione dei poli.

$$\frac{1}{s^2} = \frac{b_2}{s^2} \text{ quindi } b_2 = 1 \text{ e } a_1 = a_2 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{i}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{i}. \end{cases}$$

delle vere variabili del sistema. L'osservatore quindi rappresenta un modello del sistema il cui schema, in anello aperto, è indicato nella figura [1.16](#)

$\hat{\mathbf{x}}$

Figure 1.16: Osservatore in anello aperto.

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [Regolatore mediante retroazione stato-ingresso](#) Up: [Introduzione al metodo dello](#) Previous: [Osservatori](#)

Osservatore di ordine pieno (ordine completo)

Un modo di stimare il vettore di stato

Esempio 10 *Si voglia eseguire il dimensionamento di un regolatore basato sulla reazione stato-ingresso per un sistema con funzione di trasferimento in anello aperto pari a*

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Si desideri allocare i poli dell'anello chiuso in

$$p_1, p_2 = -0.707 \pm j0.707.$$

L'equazione caratteristica desiderata del sistema in anello chiuso sarà quindi

$$\alpha(s) = (s + 0.707 + j0.707)(s + 0.707 - j0.707) = s^2 + 1.4148s + 0.9997$$

quindi

$$\alpha_1 = 1.4148; \quad \alpha_2 = 0.9997.$$

La rappresentazione del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2}$ nello spazio di stato nella forma canonica del regolatore da origine³ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Usando la (1.44) ed essendo $a_1 = a_2 = 0$ si ha:

$$K_1 = \alpha_1 - a_1 = 1.4148 - 0 = 1.4148;$$

$$K_2 = \alpha_2 - a_2 = 0.9997 - 0 = 0.9997.$$

Con l'uso della formula di Ackermann si ottiene

$$\alpha_c = \mathbf{A}^2 + 1.4148\mathbf{A} + 0.9997\mathbf{I}$$

in cui

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi risulta:

$$\alpha_c = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4148 \\ 0 & 0.9997 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

ed infine

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \alpha_c = [0.9997 \ 1.4148].$$

Si ricorda che in Matlab sono predefinite le funzione "place" e "acker" per l'allocazione dei poli.

$$\frac{1}{s^2} = \frac{b_2}{s^2} \text{ quindi } b_2 = 1 \text{ e } a_1 = a_2 = 0$$

è di realizzare un modello che fornisca **tutte** le n variabili di stato. Qualora il modello sia realizzato per stimare solo alcune variabili di stato, allora saremo in presenza di un **osservatore di ordine ridotto**.

La fedeltà e l'efficacia dell'osservatore sarà funzione dell'errore tra gli stati

Esempio 10 Si voglia eseguire il dimensionamento di un regolatore basato sulla reazione stato-ingresso per un sistema con funzione di trasferimento in anello aperto pari a

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Si desideri allocare i poli dell'anello chiuso in

$$p_1, p_2 = -0.707 \pm j0.707.$$

L'equazione caratteristica desiderata del sistema in anello chiuso sarà quindi

$$\alpha(s) = (s + 0.707 + j0.707)(s + 0.707 - j0.707) = s^2 + 1.4148s + 0.9997$$

quindi

$$\alpha_1 = 1.4148; \quad \alpha_2 = 0.9997.$$

La rappresentazione del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2}$ nello spazio di stato nella forma canonica del regolatore da origine³ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Usando la (1.44) ed essendo $a_1 = a_2 = 0$ si ha:

$$\mathbf{K}_1 = \alpha_1 - a_1 = 1.4148 - 0 = 1.4148;$$

$$\mathbf{K}_2 = \alpha_2 - a_2 = 0.9997 - 0 = 0.9997.$$

Con l'uso della formula di Ackermann si ottiene

$$\alpha_c = \mathbf{A}^2 + 1.4148\mathbf{A} + 0.9997\mathbf{I}$$

in cui

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi risulta:

$$\alpha_c = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4148 \\ 0 & 0.9997 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

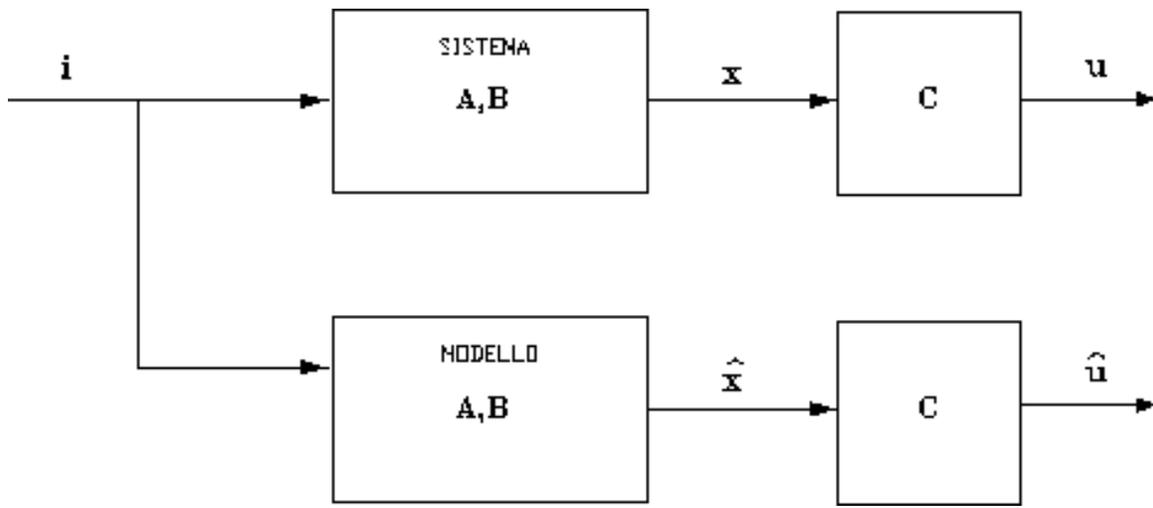
ed infine

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1] \mathbf{C}^{-1} \alpha_c = [0.9997 \quad 1.4148].$$

Si ricorda che in Matlab sono predefinite le funzione "place" e "acker" per l'allocazione dei poli.

$$\frac{3}{s^2} = \frac{b_2}{s^2} \text{ quindi } b_2 = 1 \text{ e } a_1 = a_2 = 0$$

$$\text{e gli stati reali } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{i}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{i}. \end{cases} \text{Indicando con}$$

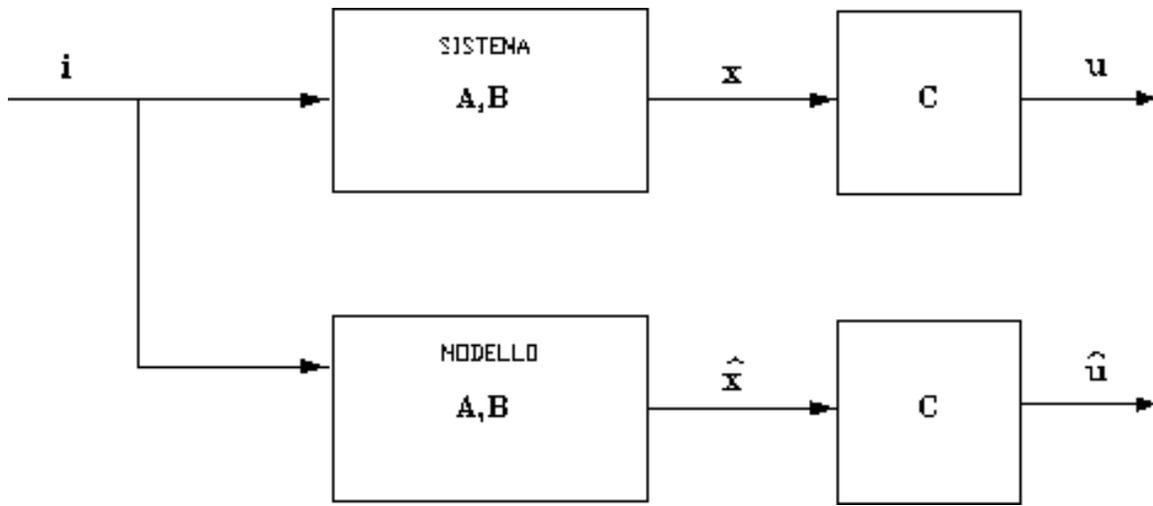


l'errore della stima si

definisce:

$$\tilde{\mathbf{x}}$$

Senza entrare nel merito della trattazione, l'errore

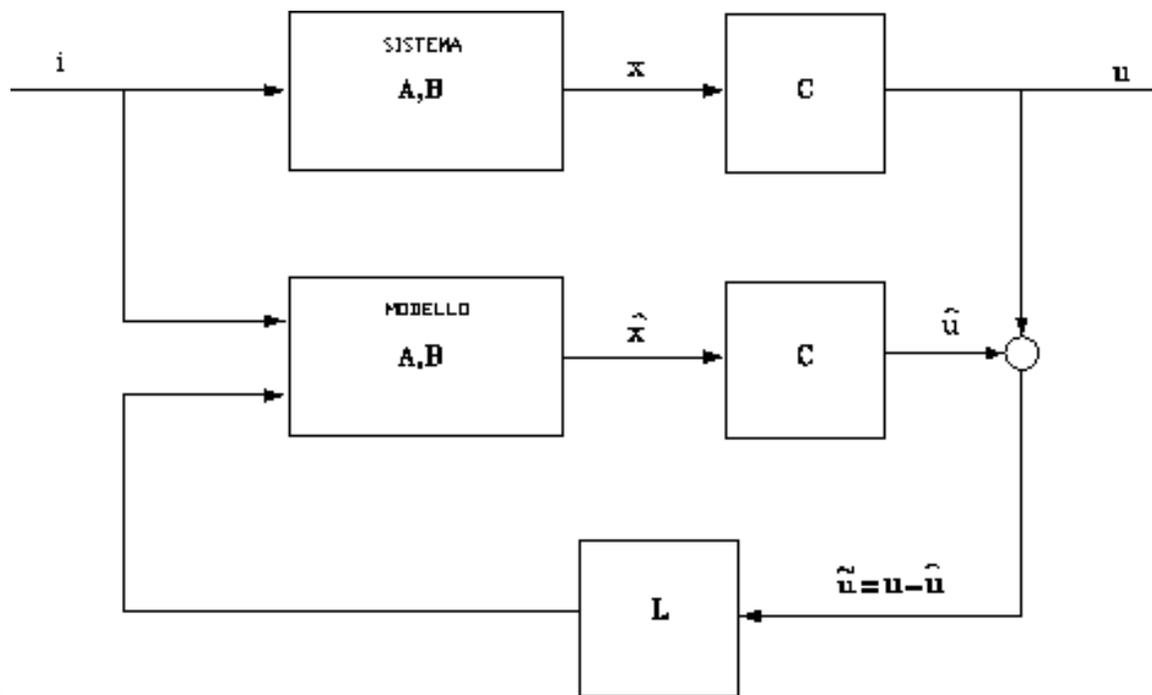


potrà essere reso nullo

retroazionando il modello secondo lo schema in figura [1.17](#).

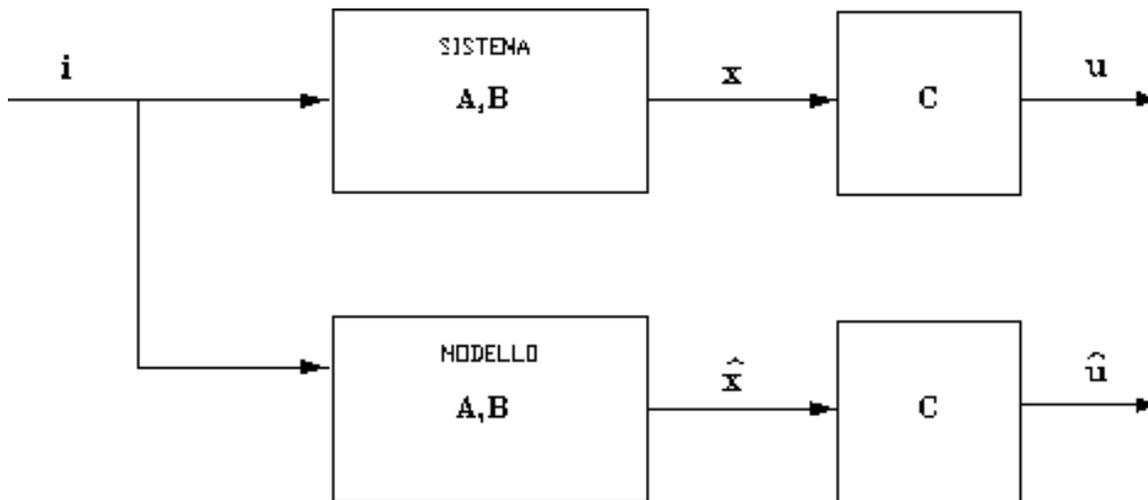
$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

Figure 1.17: Osservatore con retroazione.

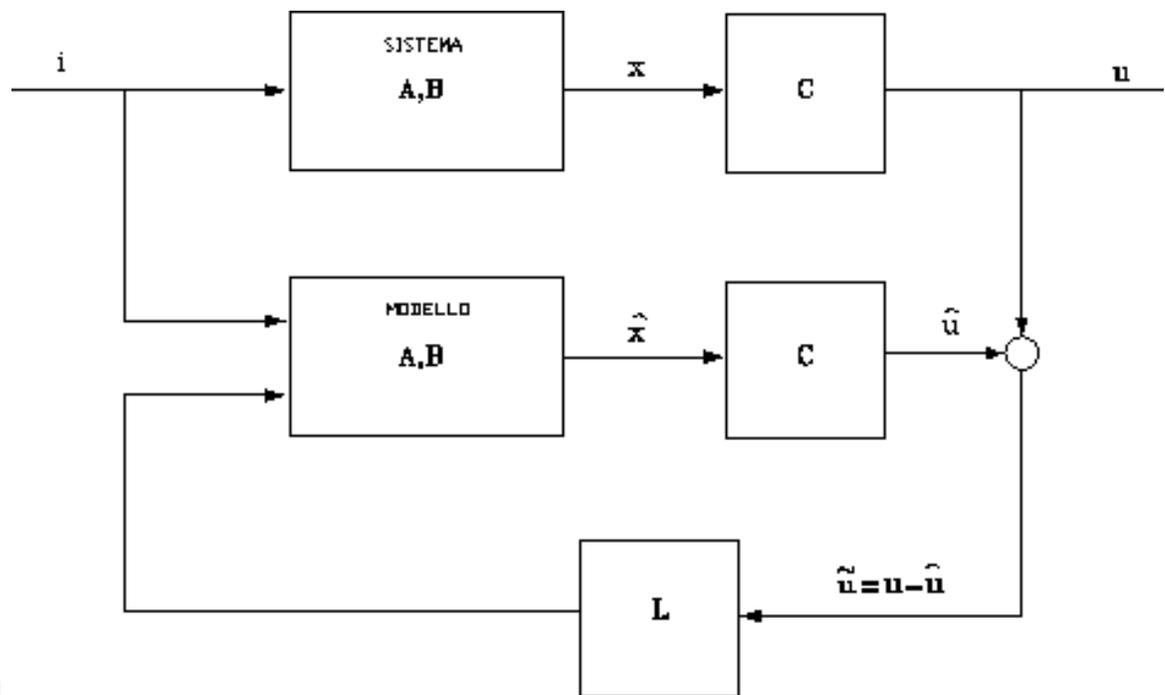


In cui determinare in modo che la dinamica dell'anello sia stabile e l'errore

è un vettore colonna da



tenda a zero.



La determinazione di formalmente identica a quella di $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = 0$. (1.39) nel problema della retroazione stato-ingresso per l'allocazione dei poli. Al fine di realizzare l'osservatore, in Matlab si utilizzano gli stessi comandi "place" e "acker" sul sistema duale \mathbf{L} . Infatti, lo schema della figura precedente può essere espanso come in Fig. 1.18.

Esempio 10 Si voglia eseguire il dimensionamento di un regolatore basato sulla reazione stato-ingresso per un sistema con funzione di trasferimento in anello aperto pari a

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Si desideri allocare i poli dell'anello chiuso in

$$p_1, p_2 = -0.707 \pm j0.707.$$

L'equazione caratteristica desiderata del sistema in anello chiuso sarà quindi

$$\alpha(s) = (s + 0.707 + j0.707)(s + 0.707 - j0.707) = s^2 + 1.4148s + 0.9997$$

quindi

$$\alpha_1 = 1.4148; \quad \alpha_2 = 0.9997.$$

La rappresentazione del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2}$ nello spazio di stato nella forma canonica del regolatore da origine³ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Usando la (1.44) ed essendo $a_1 = a_2 = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \alpha_1 - a_1 = 1.4148 - 0 = 1.4148; \\ \mathbf{K}_2 &= \alpha_2 - a_2 = 0.9997 - 0 = 0.9997. \end{aligned}$$

Con l'uso della formula di Ackermann si ottiene

$$\alpha_c = \mathbf{A}^2 + 1.4148\mathbf{A} + 0.9997\mathbf{I}$$

in cui

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi risulta:

$$\alpha_c = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4148 \\ 0 & 0.9997 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

ed infine

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \alpha_c = [0.9997 \ 1.4148].$$

Si ricorda che in Matlab sono predefinite le funzione "place" e "acker" per l'allocazione dei poli.

$$\frac{3}{s^2} = \frac{b_2}{s^2} \text{ quindi } b_2 = 1e \quad a_1 = a_2 = 0$$

Figure 1.18: Schema a blocchi dell'osservatore.

Dallo schema in Fig. 1.18 si deduce che l'equazione dell'osservatore è data da:

essendo

$$\tilde{\mathbf{x}}$$

La dinamica dell'errore risulta quindi

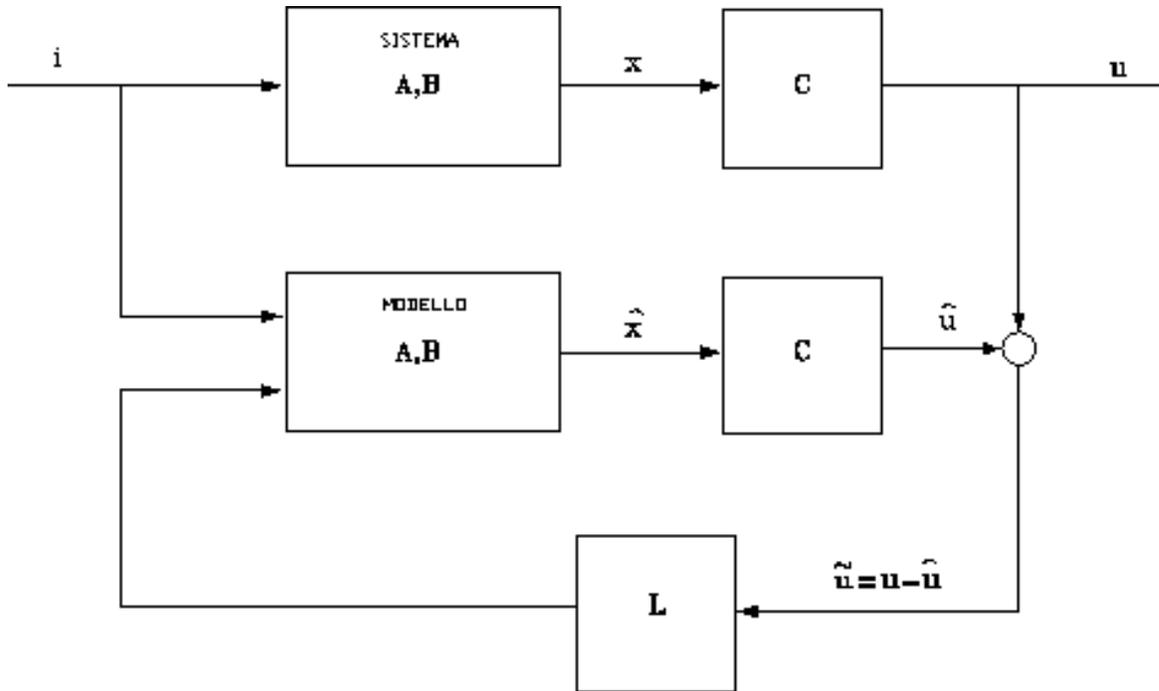
$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}i + \mathbf{L}(u - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}i + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$$

La dinamica dipenderà dagli autovalori della matrice

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}i - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}i - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{x} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

che potranno essere "allocati" con una

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}$$



opportuna scelta di

Si noti che è possibile allocare tutti gli autovalori di $\mathbf{A}_o = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ se e solo se il sistema dinamico \mathbf{A}_o risulta essere osservabile.

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Next: [About this document](#) Up: [Introduzione al metodo dello](#) Previous: [Osservatore di ordine pieno](#)

Regolatore mediante retroazione stato-ingresso ed osservatore di ordine completo

Se per la realizzazione del regolatore descritto nel paragrafo [1.38](#) nasce l'esigenza di stimare gli stati

Esempio 10 *Si voglia eseguire il dimensionamento di un regolatore basato sulla reazione stato-ingresso per un sistema con funzione di trasferimento in anello aperto pari a*

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Si desideri allocare i poli dell'anello chiuso in

$$p_1, p_2 = -0.707 \pm j0.707.$$

L'equazione caratteristica desiderata del sistema in anello chiuso sarà quindi

$$\alpha(s) = (s + 0.707 + j0.707)(s + 0.707 - j0.707) = s^2 + 1.4148s + 0.9997$$

quindi

$$\alpha_1 = 1.4148; \quad \alpha_2 = 0.9997.$$

La rappresentazione del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2}$ nello spazio di stato nella forma canonica del regolatore da origine³ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]; \quad \mathbf{D} = 0.$$

Usando la (1.44) ed essendo $a_1 = a_2 = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} K_1 &= \alpha_1 - a_1 = 1.4148 - 0 = 1.4148; \\ K_2 &= \alpha_2 - a_2 = 0.9997 - 0 = 0.9997. \end{aligned}$$

Con l'uso della formula di Ackermann si ottiene

$$\alpha_c = \mathbf{A}^2 + 1.4148\mathbf{A} + 0.9997\mathbf{I}$$

in cui

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi risulta:

$$\alpha_c = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4148 \\ 0 & 0.9997 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

ed infine

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \alpha_c = [0.9997 \ 1.4148].$$

Si ricorda che in Matlab sono predefinite le funzione "place" e "acker" per l'allocazione dei poli.

$$\frac{3}{s^2} = \frac{b_2}{s^2} \text{ quindi } b_2 = 1e \quad a_1 = a_2 = 0$$

, si ha impiegato l'osservatore descritto precedentemente. Lo schema funzionale del sistema di controllo con osservatore è riportato in Fig. 1.19.

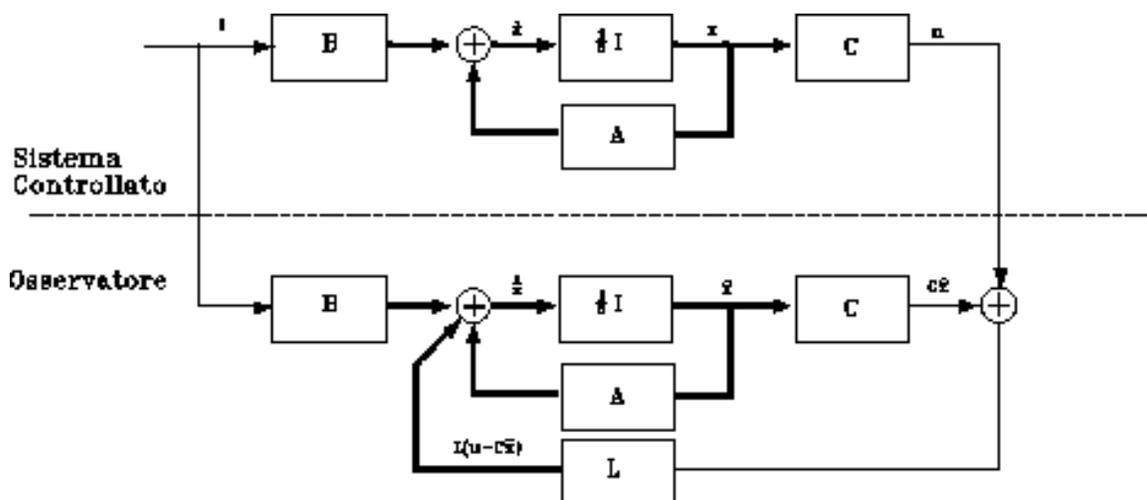


Figure 1.19: Schema funzionale del controllo con osservatore.

Si può dimostrare che i poli dell'intero sistema in retroazione corrispondono **all'unione** dei poli dell'osservatore e della reazione stato-ingresso ($\mathbf{A} - \mathbf{LC}$).

[next](#)[up](#)[previous](#)

Up: [No Title](#) Previous: [Regolatore mediante retroazione stato-ingresso](#)

About this document ...

This document was generated using the [LaTeX2HTML](#) translator Version 96.1 (Feb 5, 1996) Copyright © 1993, 1994, 1995, 1996, [Nikos Drakos](#), Computer Based Learning Unit, University of Leeds.

The command line arguments were:

latex2html -debug state.

The translation was initiated by Domenico Prattichizzo on Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:24:55 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [Sistemi di controllo digitale](#)

- [Sistemi di controllo digitale](#)
 - [Introduzione e definizione del problema](#)
 - [La conversione Analogico/Digitale](#)
 - [Condizioni e limiti della trattazione](#)
 - [Teorema del campionamento di Shannon - Aliasing](#)
 - [La conversione D/A. Ricostruzione del segnale](#)
 - [Strumenti matematici: La Z-trasformata](#)
 - [Operatore ritardo \(unitario\)](#) z^{-1}
 - [About this document ...](#)
-

Domenico Prattichizzo
Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [Introduzione e definizione del](#) Up: [No Title](#) Previous: [No Title](#)

Sistemi di controllo digitale

- [Introduzione e definizione del problema](#)
 - [La conversione Analogico/Digitale](#)
 - [Condizioni e limiti della trattazione](#)
 - [Teorema del campionamento di Shannon - Aliasing](#)
 - [La conversione D/A. Ricostruzione del segnale](#)
 - [Strumenti matematici: La Z-trasformata](#)
 - [Operatore ritardo \(unitario\)](#) z^{-1}
-

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

Next: [La conversione Analogico/Digitale](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [Sistemi di controllo digitale](#)

Introduzione e definizione del problema

In Fig. 1.1 è riportato lo schema a blocchi di un sistema tradizionale a **tempo continuo** o **analogico**. L'appellativo "tempo continuo" dipende dal fatto che i segnali nell'anello (continui o in alternata) variano (o possono variare) con continuità nel tempo.

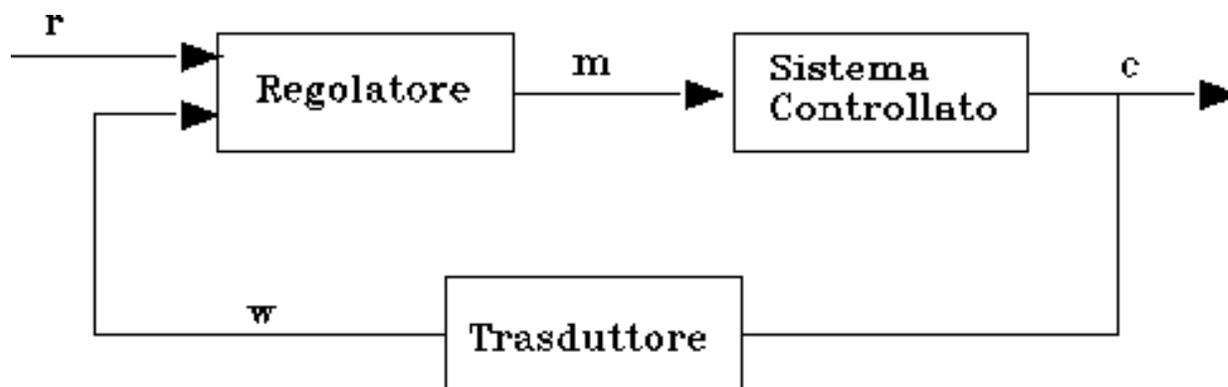


Figure 1.1: Schema di sistema di controllo a tempo continuo.

Il regolatore elabora i segnali r e w per generare un segnale di comando opportuno m (variabile manipolabile) al fine di fare evolvere la grandezza controllata c nella maniera desiderata.

Il regolatore è costituito in generale da un amplificatore di segnale e da una rete corretrice realizzata con reti RC passive o con amplificatori operazionali. Il regolatore è quindi di tipo "analogico."

In Fig. 1.2 è riportato lo schema di un sistema di controllo a **tempo discreto** o **digitale**.

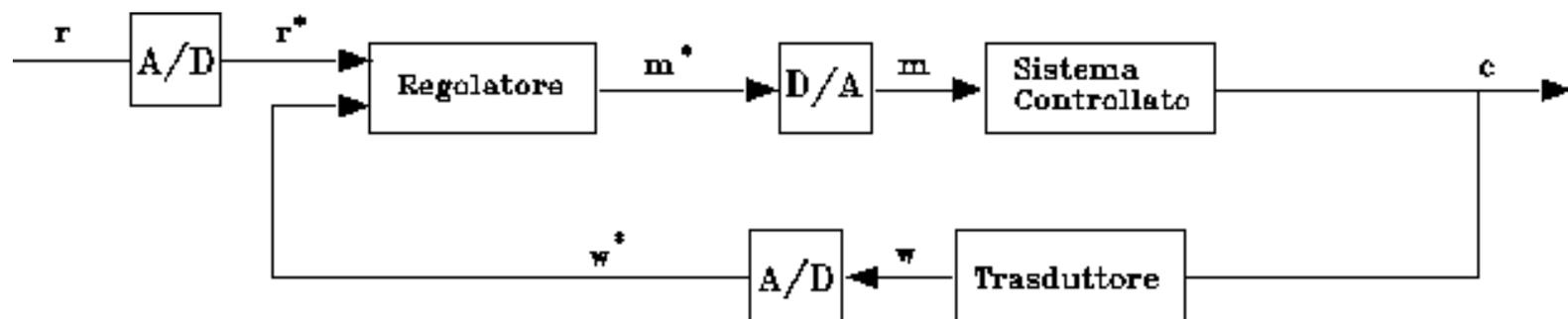


Figure 1.2: Schema di sistema di controllo a tempo discreto o digitale.

La differenza sostanziale con i sistemi tradizionali consiste nella presenza dell'**elaboratore digitale**.

L'elaboratore digitale, come è noto, non opera in maniera continua, ma ad intervalli di tempo ben determinati (*clock interno*). Con riferimento alla Fig. 1.2, ogni valore assunto dall'uscita m^* è il risultato di un'elaborazione dei dati d'ingresso r^* e w^* che viene eseguita dal Regolatore in un tempo finito (non nullo). I valori assunti dall'uscita del regolatore non sono disponibili con continuità nel tempo ma solo in intervalli discreti.

Oggi giorno la larga diffusione dei controllori digitale nasce dal fatto che il regolatore digitale può essere semplicemente implementato per mezzo di un elaboratore (microprocessore, DSP o altro).

Affinchè l'elaboratore possa fornire un dato di uscita dovrà disporre in ingresso delle quantità r e w convertite in forma numerica (r^* e w^*). Tale conversione avviene per mezzo di un dispositivo che prende il nome di **convertitore analogico/digitale** (A/D). Il risultato dell'elaborazione m^* è in forma numerica e quindi non è adatto a pilotare il sistema controllato nel caso in cui quest'ultimo sia un processo di tipo tempo-continuo. Il segnale di comando m all'ingresso del sistema controllato deve essere quindi di tipo analogico. A tal fine si utilizzano dei dispositivi che trasformano il segnale digitale in analogico e prendono il nome di convertitori digitale/analogico (D/A).

Le operazioni di conversione A/D e D/A avvengono normalmente ad intervalli costanti di tempo di durata T . Tale tempo T prende il nome di **periodo di campionamento**. La gestione dei tempi di conversione è affidata al clock dell'elaboratore (v. Fig. 1.3).

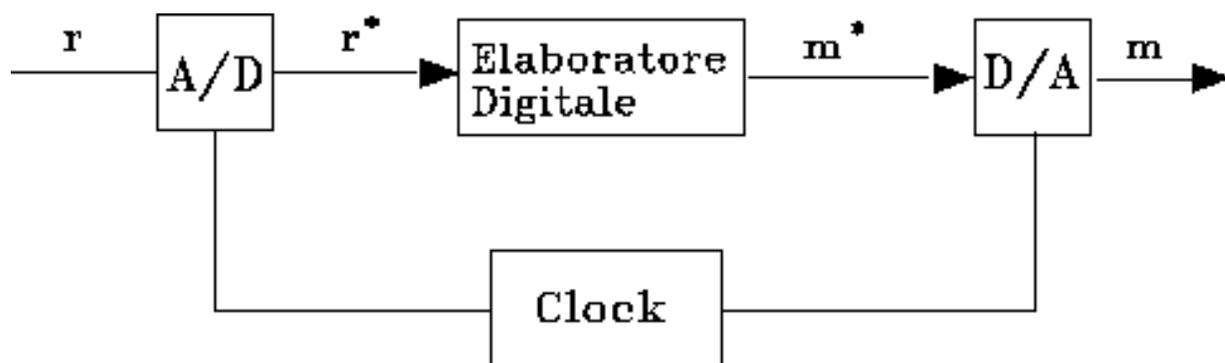


Figure 1.3: Gestione dei tempi di conversione.

Da quanto sopra, emerge che nell'anello di regolazione esistono dei segnali (r^* , w^* , m^*) che variano (ed esistono) ad intervalli discreti di tempo. Da ciò la denominazione di **sistemi a tempo discreto** per i sistemi che comprendono tali segnali.

Lo schema a blocchi di Fig. 1.2 può essere trasformato (ipotizzando che il regolatore sia un trasduttore ideale con guadagno unitario) nello schema funzionalmente identico di Fig. 1.4.

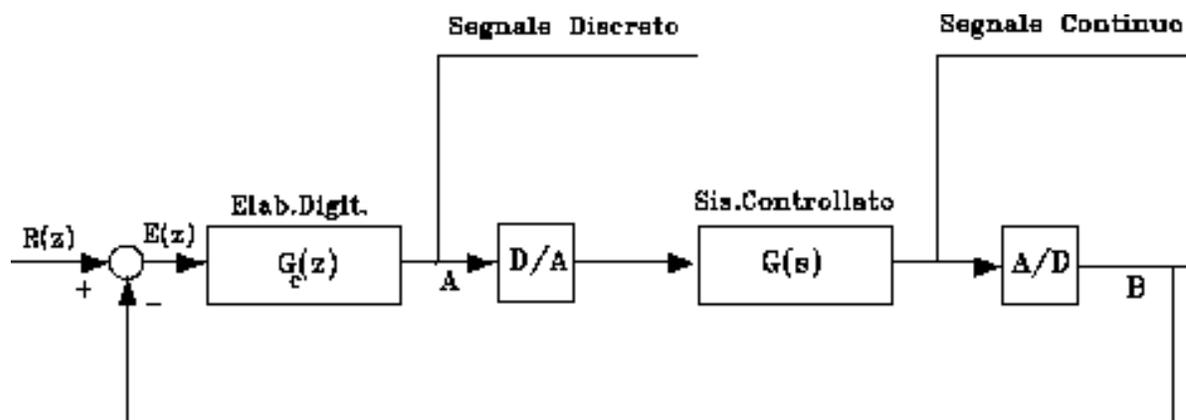


Figure: Schema a blocchi del sistema di controllo a tempo discreto analogo a quello indicato in Fig. 1.2.

In tale schema compaiono le quantità $R(z)$, $E(z)$, $G_c(z)$ dove z è la variabile complessa della z -trasformata dei segnali a tempo discreto.

Dallo schema di Fig. 1.4 si può estrarre la porzione compresa tra i punti A e B (v. Fig. 1.5) indicandola con $G(z)$.

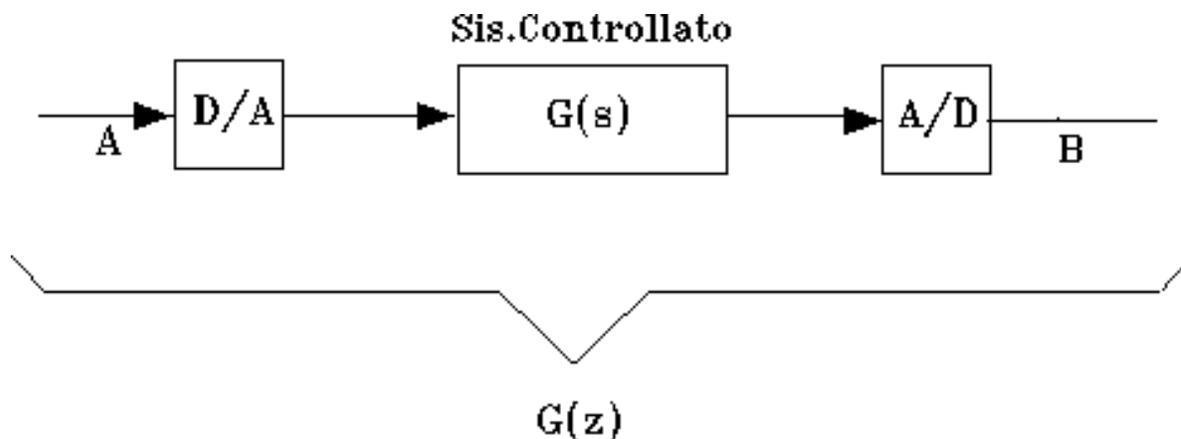


Figure 1.5: Funzione di Trasferimento.

Nota la $G(z)$ lo schema di fig.4 si semplifica come indicato in Fig. 1.6.

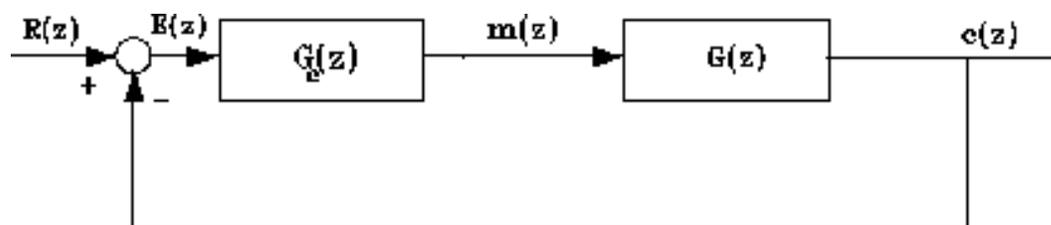


Figure 1.6: Schema a blocchi del sistema di controllo a tempo discreto in termini di segnali e sistemi a tempo discreto.

Come già si è detto l'elaboratore digitale è un elemento che caratterizza i sistemi a tempo discreto (digitali, come meglio sarà precisato). In particolare l'elaboratore è chiamato a svolgere la funzione di regolatore e quindi $G_c(z)$ sarà comunemente indicata con il nome di **regolatore digitale**.

Uno dei compiti principali della trattazione che segue è quello di presentare le procedure di analisi e progetto atte alla definizione della $G_c(z)$, ossia della funzione di trasferimento del regolatore idoneo a conferire all'anello le caratteristiche di stabilità, precisione, comportamento transitorio, insensibilità alle variazioni parametriche e capacità di reiezione dei disturbi desiderate.

A questo punto ci chiediamo quali siano i vantaggi o gli svantaggi dei sistemi di controllo digitali.

Tra i vantaggi si può indicare:

a)

maggiore precisione e capacità di elaborazione; infatti l'elaborazione numerica dei segnali consente di utilizzare algoritmi anche molto sofisticati senza alcun limite per la complessità dei programmi che possono svolgere, oltre alla funzione di regolazione, anche funzioni ausiliarie quali messaggi all'operatore, registrazione di dati, gestione allarmi ecc.;

b)

maggiore flessibilità: modifiche del regolatore nei sistemi tradizionali impongono interventi sull'hardware mentre nei sistemi digitali è sufficiente modificare il programma (software) implementato nell'elaboratore;

c)

maggior affidabilità e reperibilità: sono quindi evitati i problemi connessi con le variazioni parametriche dei sistemi analogici;

d)

maggior facilità nella trasmissione a distanza dei segnali che risulta priva di errori ed esente da disturbi essendo i segnali codificati.

Tra gli svantaggi si può elencare:

a1)

progettazione più difficoltosa;

b1)

stabilizzabilità più difficoltosa;

c1)

possibilità maggior di arresti dovuti a disturbi.

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [La conversione Analogico/Digitale](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [Sistemi di controllo digitale](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

Next: [Condizioni e limiti della](#) Up: [Sistemi di controllo digitale](#) Previous: [Introduzione e definizione del](#)

La conversione Analogico/Digitale

L'impiego dell'elaboratore digitale implica la necessità di convertire un segnale analogico $e(t)$ in una successione di valori numerici corrispondenti all'entità del segnale stesso negli istanti di campionamento.

Tale operazione può essere schematizzata come indicato in Fig. 1.7 e prende il nome di **campionamento**.

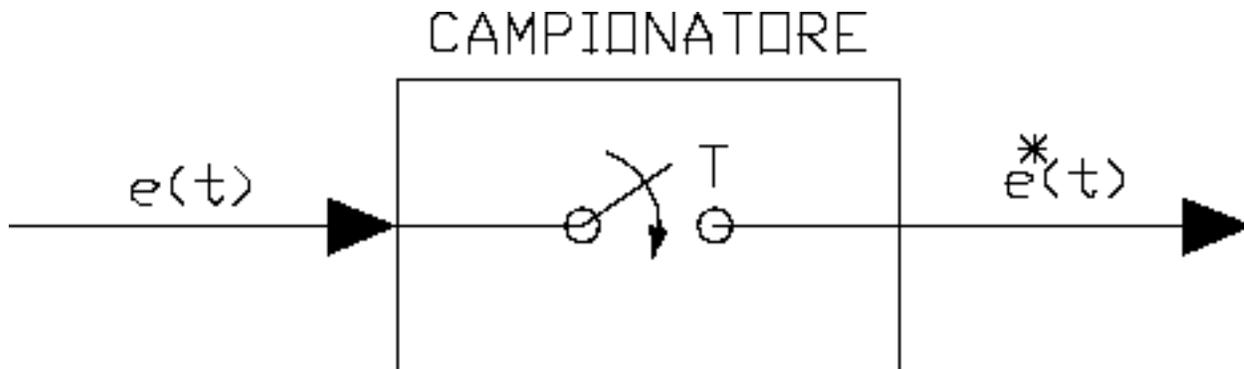


Figure 1.7: Schema dell'operazione di campionamento.

In pratica il campionamento viene schematizzato come un interruttore che chiude il circuito ogni T secondi per un tempo infinitesimo.

In realtà, affinché il valore del segnale negli istanti di campionamento $e(kT)$  sia utilizzabile dall'elaboratore è necessario che venga espresso in codice binario.

Per ottenere quindi il segnale digitale del campionamento è necessario effettuare una **quantizzazione** del segnale campionato cioè l'approssimazione del suo valore, appartenente all'insieme dei numeri reali, con quello corrispondente ad un numero di cifre limitato (livelli di discretizzazione)

bit del convertitore		livelli di discretizzazione
8	→	256
10	→	1024
12	→	4096

che appartiene al sottoinsieme finito dei numeri interi.

Nella Fig. 1.8 è indicato il campionamento e la quantizzazione di un segnale analogico

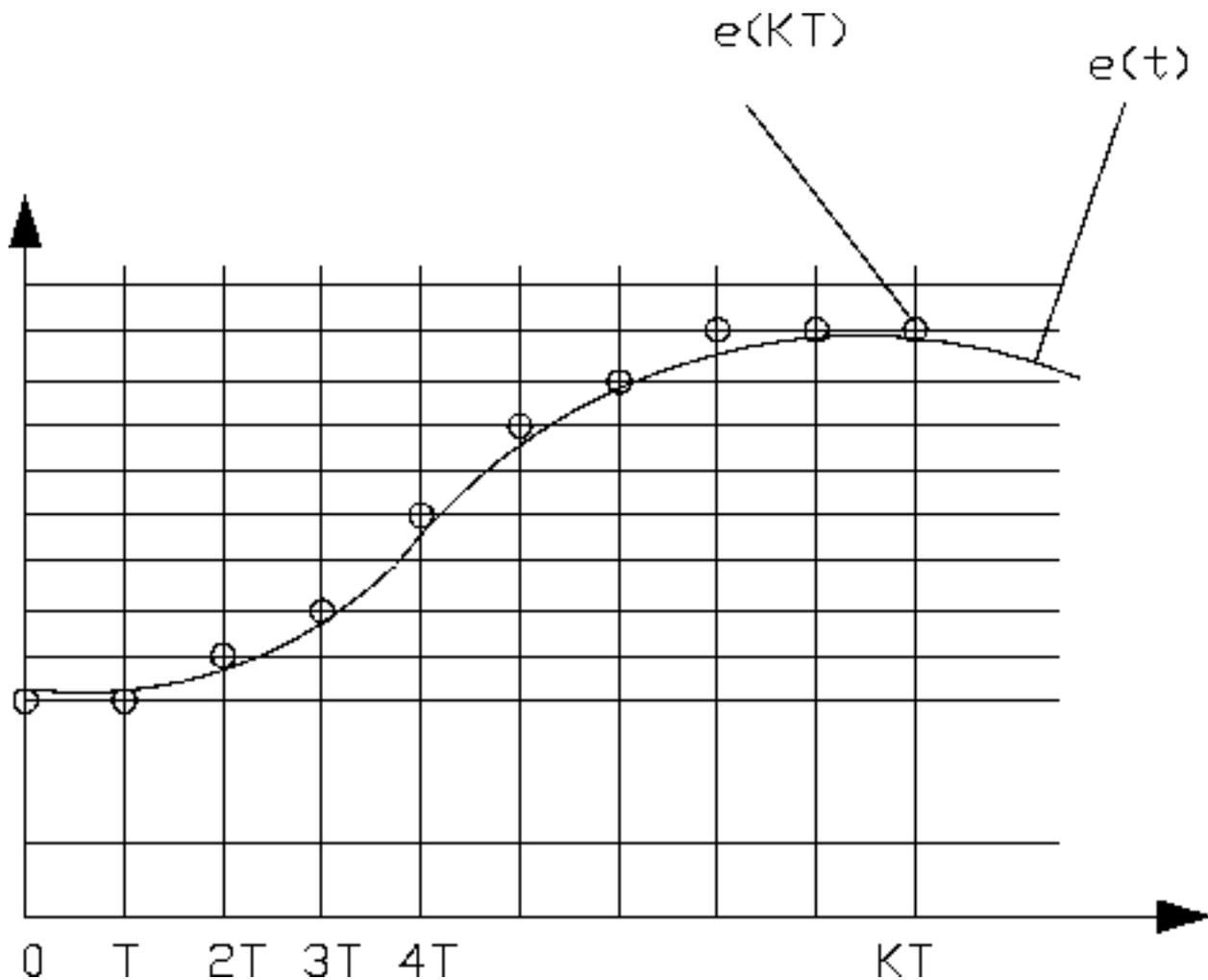


Figure 1.8: Campionamento e quantizzazione di un segnale analogico.

Qualora gli errori di discretizzazione siano sufficientemente bassi, l'effetto della quantizzazione può essere trascurato o al più considerato come un disturbo nell'anello di regolazione.

Nel seguito si assumerà che la quantizzazione sia trascurabile.

In questo caso il segnale digitale può essere pensato come se fosse ottenuto dal solo campionamento.

L'operazione di campionamento indicata nella Fig. [1.7](#) fornisce quindi il segnale $e^*(t)$ che può essere analizzato in tempo continuo secondo la schematizzazione in Fig. [1.9](#) (Modulazione di una successione di impulsi di Dirac di area unitaria e periodo T).

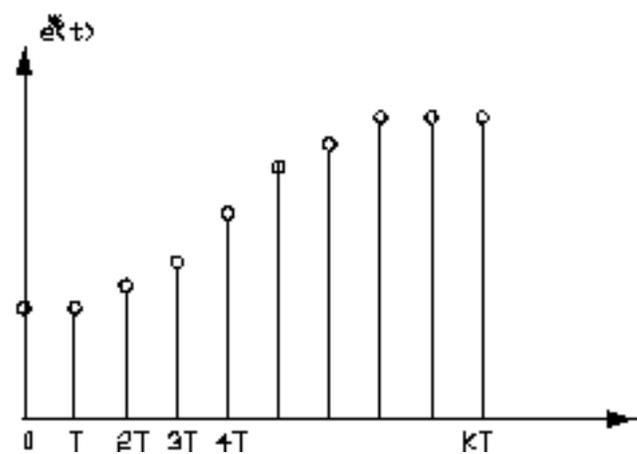
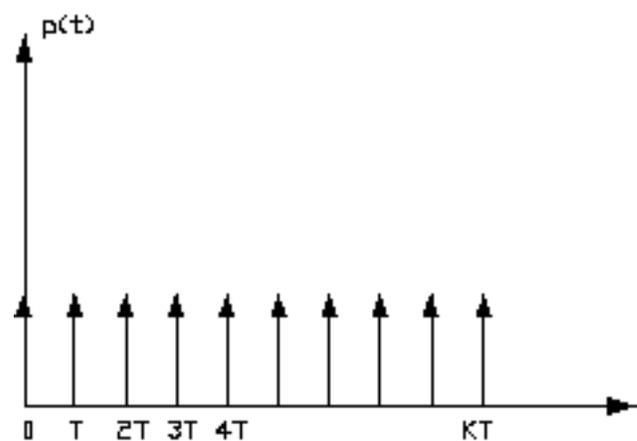
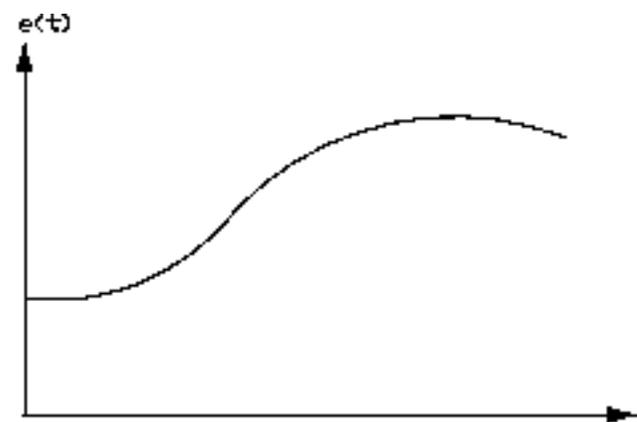


Figure 1.9: Campionatore ideale. Segnale campionato come modulazione di impulsi unitari di periodo T .

Il segnale campionato $e^*(t)$ è analiticamente espresso nella seguente maniera:

$$e^*(t) = e(t) \cdot p(t)$$

in cui con $p(t)$ abbiamo indicato la successione di impulsi unitari.

Con riferimento alla Fig. [1.10](#) ci chiediamo ora quale relazione esista tra $E(s)$ (T.d.L. del segnale

analogico) ed $E^*(s)$ (T.d.L. del segnale campionato).

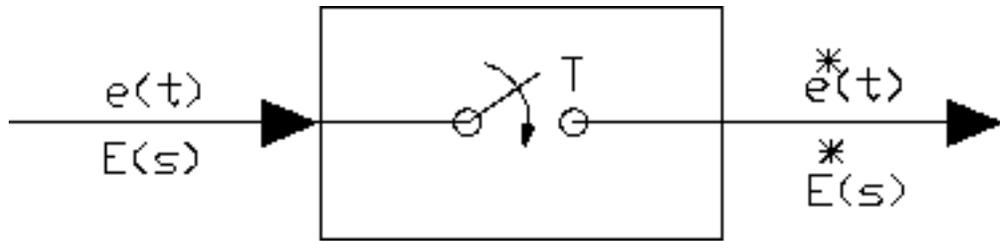


Figure 1.10: L-trasformata del segnale campionato.

L-trasformando si ottiene 

$$E^*(s) = L[e(t) \cdot p(t)] = E(s) * P(s)$$

dove con $*$ si è indicato il prodotto di convoluzione. Ricordando quanto riportato circa la convoluzione nel dominio complesso in particolare quando una delle trasformate ha poli semplici si ottiene:

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} E(s - jr\Omega) \quad (1.1)$$

in cui $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ è la **pulsazione di campionamento**.

Si noti che $E^*(s)$ risulta essere periodica di periodo $j\Omega$, infatti ponendo nella [1.1](#) $s = s_1 - j\Omega$ si ottiene:

$$E^*(s_1 - j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} E[s_1 - j(r+1)\Omega] = E^*(s_1)$$

[next](#)
[up](#)
[previous](#)

Next: [Condizioni e limiti della](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [Introduzione e definizione del](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Next: [Teorema del campionamento di](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [La conversione Analogico/Digitale](#)

Condizioni e limiti della trattazione

In quanto segue si assume che

1. Tutti i blocchi rappresentano organi lineari tempo invarianti.
2. Il periodo di campionamento T è costante.
3. L'effetto dovuto alla quantizzazione del segnale nella conversione A/D è trascurabile. Infatti se si rappresenta il segnale con un numero di *digit* sufficientemente elevato, tale effetto può essere considerato come un segnale che si sovrappone al segnale utile.

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

Next: [La conversione D/A. Ricostruzione](#) Up: [Sistemi di controllo digitale](#) Previous: [Condizioni e limiti della](#)

Teorema del campionamento di Shannon - Aliasing

Il quesito che ci poniamo a questo punto è il seguente: dato un segnale continuo $e(t)$, con quale criterio scegliamo la pulsazione di campionamento Ω (e quindi il periodo di campionamento T) in modo che il segnale campionato $e^*(t)$ contenga tutte le informazioni contenute in $e(t)$?

Si intuisce che il periodo di campionamento Ω sarà in qualche modo legato alla rapidità di evoluzione del fenomeno rappresentato dal segnale $e(t)$.

Si intuisce inoltre che il segnale campionato $e^*(t)$ sarà stato correttamente campionato quando da esso in qualche modo può essere "ricostruito" $e(t)$.

Per rispondere al quesito sopra indicato, prendiamo in considerazione un segnale da campionare $e(t)$ avente uno spettro  limitato in frequenza (o a banda limitata) come mostrato in Fig. 1.11.

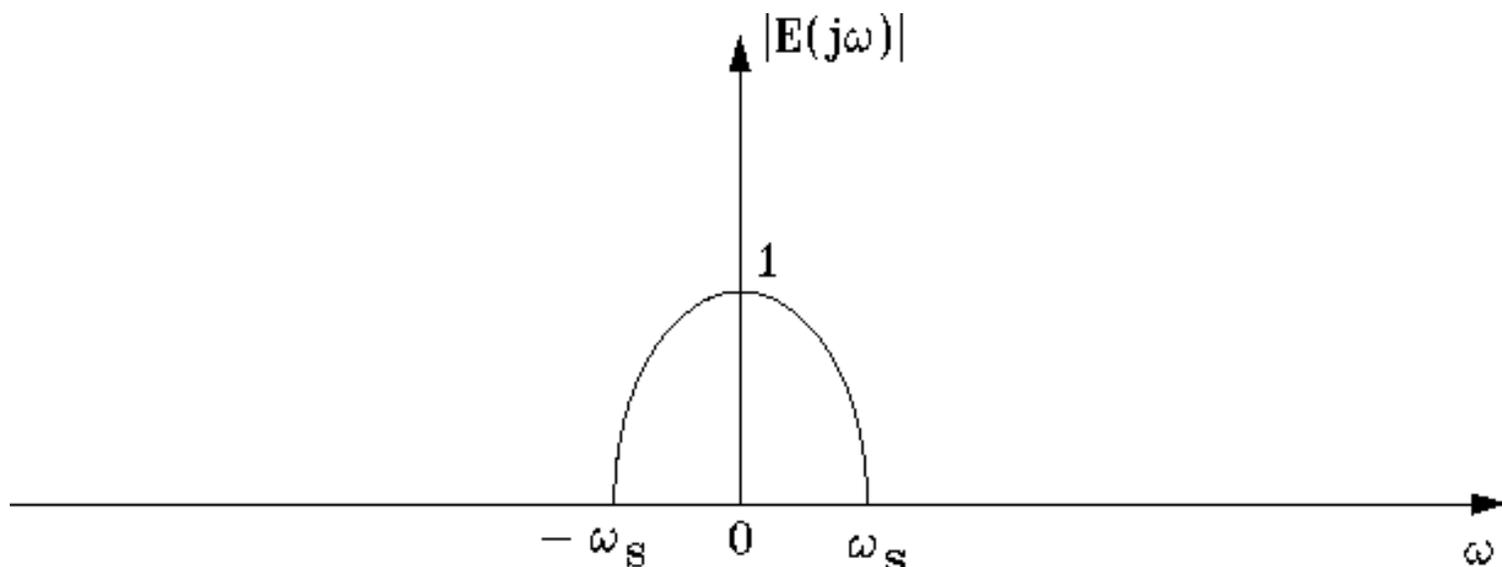


Figure 1.11: Possibile spettro di un segnale $e(t)$ a banda limitata.

Al di sopra della pulsazione ω_s , lo spettro del segnale $e(t)$ è nullo (cioè $e(t)$ non contiene nessuna componente frequenziale).

Lo spettro del segnale campionato $e^*(t)$ si ottiene dalla [1.1](#) sostituendo $j\omega$ al posto della variabile complessa s .

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} E(j\omega - jr\Omega) \quad (1.2)$$

Nella Fig. 1.12 è riportato sia (b) l'andamento dello spettro del segnale campionato (nel caso in cui $\Omega/2 > \omega_s$) che (a) lo spettro del segnale da campionare.

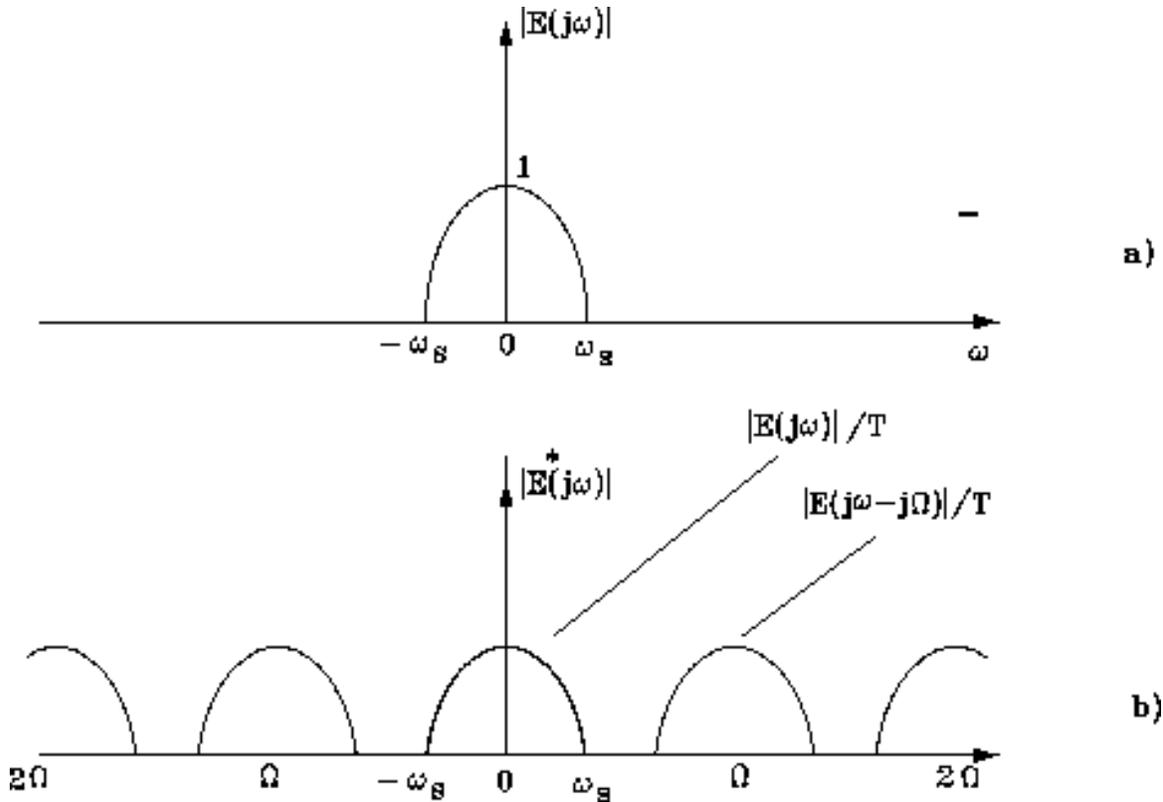


Figure 1.12: (a) Spettro del segnale da campionare $e(t)$. (b) spettro del segnale campionato $e^*(t)$ nel caso di $\Omega/2 > \omega_s$.

Nello spettro del segnale campionato la componente $|E(j\omega)|/T$ prende il nome di **componente primaria**, mentre tutte le altre componenti $|E(j\omega - jr\Omega)|/T$ con $r \neq 0$ prendono il nome di **componenti complementari**.

È da sottolineare il fatto che la scelta di una pulsazione di campionamento Ω tale che $\Omega/2 > \omega_s$ è essenziale in quanto tiene separate nello spettro le varie componenti che si presentano come la ripetizione della componente primaria.

Nel caso in cui la condizione $\Omega/2 > \omega_s$ non fosse rispettata il segnale campionato avrebbe uno spettro come quello riportato in Fig. 1.13.

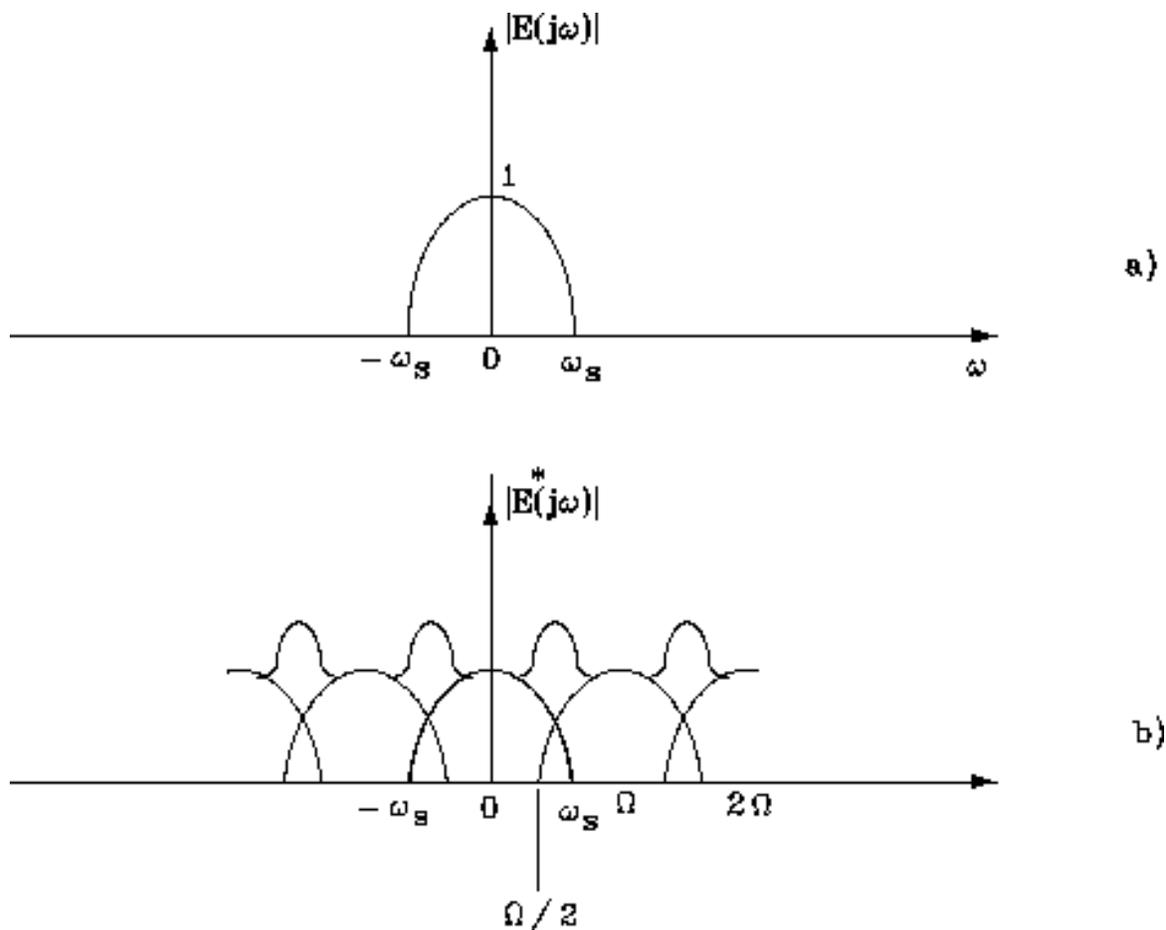


Figure 1.13: (a) Spettro del segnale da campionare $e(t)$. (b) spettro del segnale campionato $e^*(t)$ nel caso di $\Omega/2 < \omega_s$.

Le singole componenti spettrali (primaria e complementari) si sovrappongono parzialmente e si combinano per formare lo spettro risultante. Da quanto sopra, si deduce che se, e solo se la condizione $\Omega/2 > \omega_s$ è soddisfatta (Fig. 1.12), non si ha sovrapposizione ed è possibile distinguere la componente primaria da quelle complementari nel segnale campionato. In queste condizioni, se il segnale campionato $e^*(t)$ viene mandato in ingresso ad un **filtro ideale** di spettro opportuno è possibile ricostruire il segnale originario $e(t)$ a partire dal segnale a dati campionati.

Le considerazioni precedenti sono riassunte nel **Teorema del campionamento o di Shannon**:

Teorema 1 Sia $\Omega = 2\pi/T$ la pulsazione di campionamento (detta anche pulsazione di Nyquist) ove T è il periodo di campionamento, e sia ω_s la più alta componente spettrale del segnale continuo $e(t)$ da campionare. Il segnale $e(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $e^*(kT)$ se la pulsazione di campionamento è maggiore del doppio della pulsazione ω_s ,

$$\Omega/2 > \omega_s.$$

In quanto segue si approfondisce il fenomeno legato al processo di campionamento quando le condizioni del teorema di Shannon non sono rispettate. Il fenomeno di sovrapposizione descritto in Fig. 1.13 prende il nome di **aliasing**. In altri termini l'aliasing corrisponde alla generazione (dopo l'operazione di campionamento) di nuove componenti spettrali nel *range* di frequenza della componente spettrale (primaria) di partenza.

Con riferimento alla Fig. 1.13 sia ω_1 , una pulsazione compresa nel campo di pulsazioni in cui la componente primaria ed una componente complementare si sovrappongono. Per tale pulsazione ω_1 esistono quindi sia un'armonica appartenente alla componente primaria che una "nuova" armonica appartenente alla componente complementare . In questo caso il segnale tempo-continuo ricostruito a partire dal segnale tempo-discreto per mezzo di un filtro passa-basso ideale non sarebbe in grado di ricostruire con fedeltà il segnale di partenza $e(t)$. In particolare si perderebbero informazioni relative alle alte frequenze del segnale.

Una condizione necessaria per l'applicazione del Teorema di Shannon è che il segnale da campionare sia passa-basso. Considerazioni pratiche ci insegnano però che il segnale $e(t)$ da campionare, anche per la presenza di disturbi (generalmente ad alta frequenza), ha una banda molto ampia se non infinita.

Per evitare il fenomeno dell'aliasing che sarebbe perciò inevitabile è quindi opportuno (pre-)filtrare il segnale $e(t)$ prima del campionamento con un filtro anti-aliasing come descritto in Fig. 1.14 dove si è indicato con $\hat{e}(t)$ il segnale da campionare.

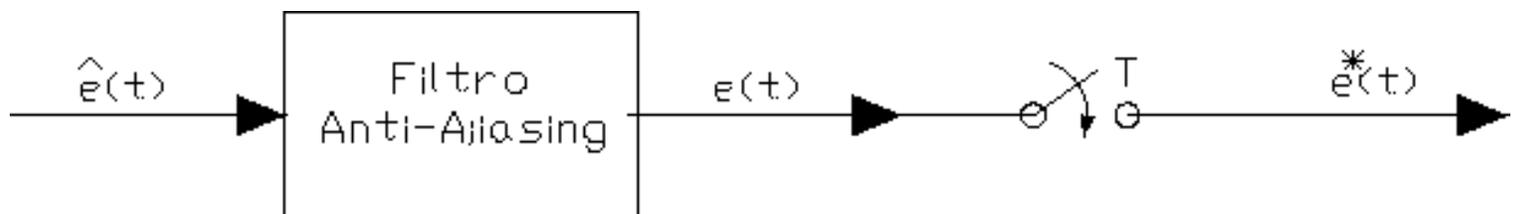


Figure 1.14: Filtro anti-aliasing.

Risultati soddisfacenti si ottengono con filtri passa-basso con sufficiente attenuazione (e.g. -40 db ed oltre) per $\omega > \Omega/2$.

Esempio 1 Si immagina di voler campionare un segnale:

$$e(t) = e^{-t}$$

Lo spettro del segnale si ottiene diagrammando:

$$|E(j\omega)| = |L[e^{-t}]_{s=j\omega}| = \left| \left(\frac{1}{s+1} \right)_{s=j\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

Usando Matlab il diagramma può essere ottenuto nel modo seguente:

```
>> w = linspace(0, 50, 101)
>> temp = ones(size(w)) ./ (j * w + 1)
```

```
>> m=abs (temp)
>> plot (w, m)
```

Lo spettro del segnale campionato $e^*(t)$ si ottiene diagrammando:

$$|E^*(j\omega)| = |E(z)_{z=e^{j\omega T}}|$$

dove $E(z)$ è la Z-trasformata della funzione $e(t)$.

Poichè (T = periodo di campionamento)

$$E(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

si ha che

$$|E^*(j\omega)| = \left| \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - e^{-T}} \right|$$

Usando Matlab lo spettro del segnale campionato può essere ottenuto nel modo seguente:

```
>> w= linspace (0, 400, 801);
>> T=0.1256;
>> temp=exp (j * T * w) / cdot / (exp(j * T * w) - exp (-T));
>> m=abs (temp);
>> plot (w, m)
```

Con le istruzioni sopra riportate si ottiene lo spettro corrispondente ad una pulsazione di campionamento $\Omega = 50$ rad/sec ($T = 0.1256$ sec).

Ponendo $T = 0.0628$ sec. si può ottenere lo spettro per $\Omega = 100$ rad/sec.

[next](#)
[up](#)
[previous](#)

Next: [La conversione D/A. Ricostruzione](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [Condizioni e limiti della](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)

Next: [Strumenti matematici: La Z-trasformata](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [Teorema del campionamento di](#)

La conversione D/A. Ricostruzione del segnale

Come abbiamo già accennato, la ricostruzione del segnale continuo dal segnale campionato, nella pratica dei sistemi di controllo a tempo discreto viene effettuata con il convertitore D/A.

Poichè il filtro ideale di cui si è parlato in precedenza non è fisicamente realizzabile e poichè i sistemi (tempo-continuo) da controllare devono essere pilotati con segnali a tempo continuo, i convertitori D/A sono tipicamente dei ricostruttori (detti anche comunemente circuiti di filtro o di tenuta).

Essi si ottengono dall'espansione in serie di Taylor del segnale $e(t)$ nell'intorno del punto $t=kT$

$$e(t) = e(kT) + \left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=kT} (t - kT) + \dots$$

Il numero di termini derivativi utilizzati definisce l'**ordine del ricostruttore**.

Vediamo ora i ricostruttori più usati:

Ricostruttore di ordine zero (ZOH: zero order hold)

È il più diffuso per la sua semplicità. Il legame ingresso-uscita risulta

$$e(t) = e(kT) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T[.$$

La ricostruzione del segnale avviene approssimando con $e(kT)$, i valori assunti da $e(t)$ per t compreso tra due campioni successivi kT ed $(k+1)T$.

Per il ricostruttore di ordine zero, come per gli altri ricostruttori è possibile determinare la funzione di trasferimento continua, nell'ipotesi di considerare il segnale campionato in ingresso come una sequenza di impulsi di Dirac di valore pari a $e(kT)$.

Indicando con $g(t)$ la risposta del sistema (nel caso in esame il ricostruttore di ordine zero) all'impulso unitario $\delta(t)$ all'istante $t=0$, è noto che la F.d.T. $G(s)$ è data da $G(s) = L[g(t)]$, cioè dalla L -trasformata della risposta impulsiva.

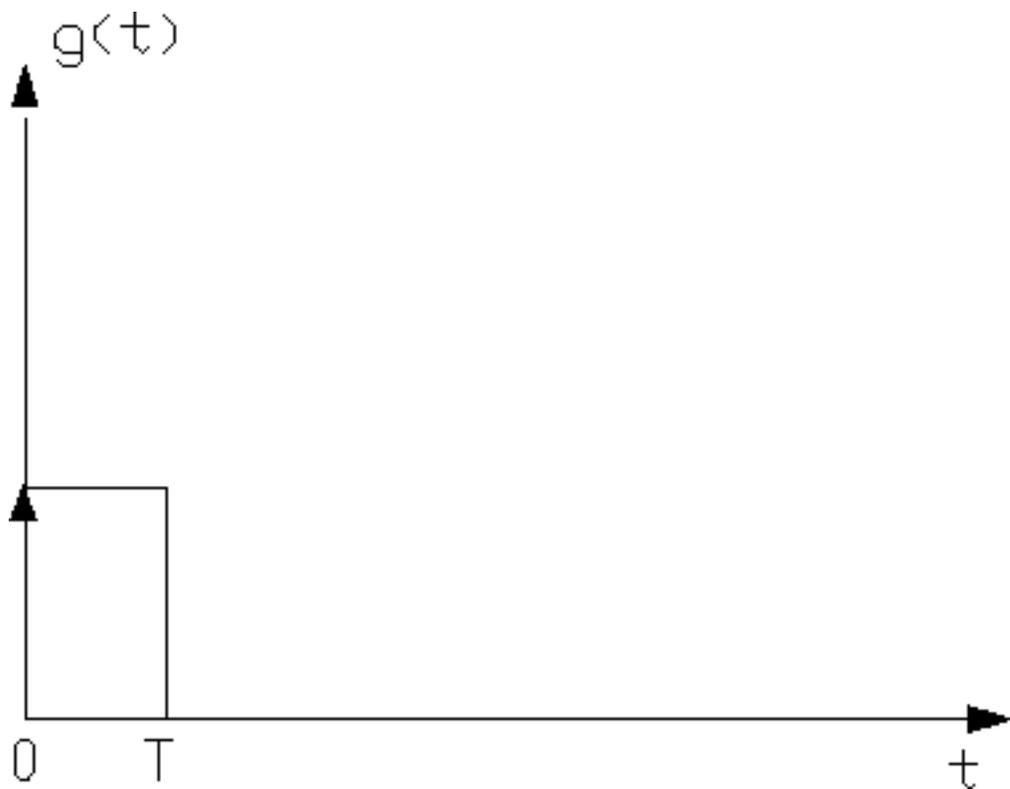


Figure 1.15: Risposta impulsiva del ricostruttore di ordine zero.

In Fig. [1.15](#) è indicata la $g(t)$ del ricostruttore di ordine zero la cui espressione risulta:

$$g(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

dove con $1(\dots)$ si è indicata la funzione gradino. L -trasformando si ottiene:

$$G(s)_{RO} = L[1(t) - 1(t - T)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (1.3)$$

La funzione di risposta armonica del ricostruttore di ordine zero può essere ottenuta sostituendo jw ad s nella [1.3](#). Si ottiene:

$$\begin{aligned} G_{RO}(jw) &= \frac{1 - e^{-jwT}}{jw} = \frac{e^{-\frac{jwT}{2}} (e^{\frac{jwT}{2}} - e^{-\frac{jwT}{2}})}{jw} = \\ &= \frac{2e^{-\frac{jwT}{2}}}{w} \cdot \frac{e^{\frac{jwT}{2}} - e^{-\frac{jwT}{2}}}{2j} = \frac{2e^{-\frac{jwT}{2}}}{w} \operatorname{sen}\left(\frac{wT}{2}\right) = T \frac{\operatorname{sen}(wT/2)}{wT/2} e^{-\frac{jwT}{2}}. \end{aligned}$$

Il modulo della funzione di risposta armonica risulta quindi essere:

$$|G_{RO}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|.$$

Il guadagno statico risulta:

$$|G_{RO}(j0)| = T$$

L'andamento in scala lineare del modulo in funzione di ω è indicato in Fig. [1.16](#) ottenuta con il seguente m-file di matlab.

```

%%% armres.m
%%% m-file per Matlab
pulscamp=10;
T=2*pi*pulscamp;
w=linspace(0,2*pulscamp);
temp=zeros(1,length(w));
for i=1:length(temp),
    temp(i)=(1-exp(-j*w(i)*T))/(j*w(i));
end
for i=1:length(temp),
    m(i)=abs(temp(i))/T;
end
plot(w,m);
xlabel('w (rad/sec)');
ylabel('abs(G_RO(jw))/T');

```

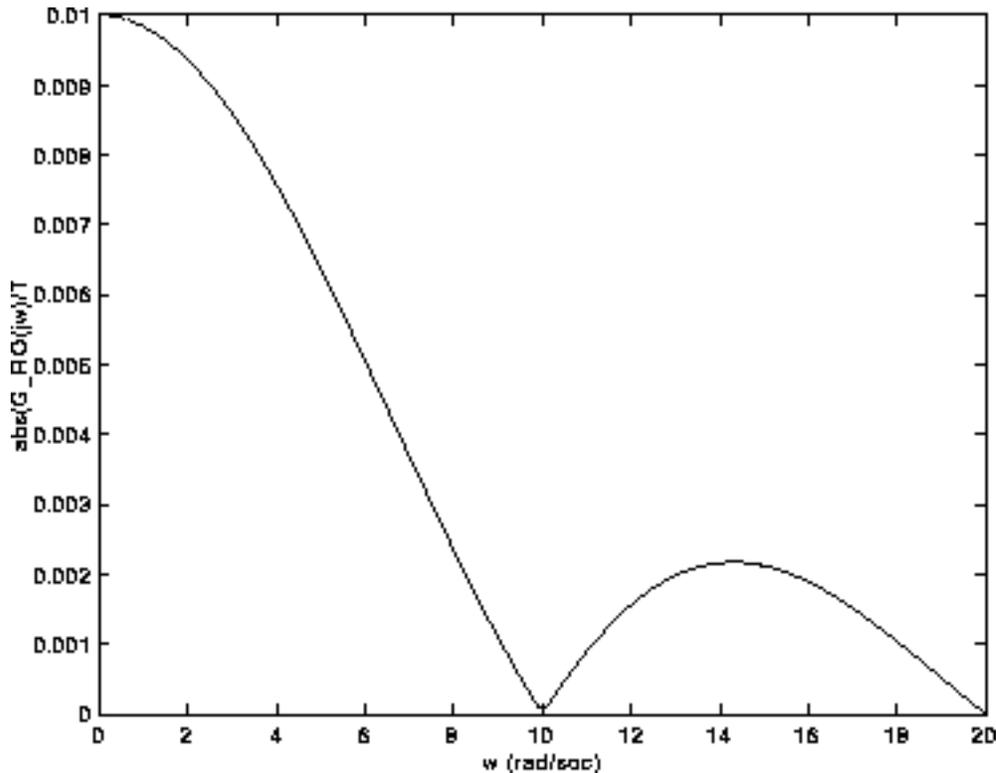


Figure 1.16: Risposta armonica di $G_{RO}(j\omega)/T$.

Ricostruttore di ordine uno (FOH)

Tra due campioni successivi $e(k)$ ed $e(k+1)$ il ricostruttore di ordine uno fornisce in uscita un segnale (approssimazione di $e(t)$) che è funzione non solo del campione $e(k)$, ma anche del campione $e(k-1)$ (per il calcolo della derivata).

Nella Fig. 1.17 è indicata la ricostruzione del segnale che si effettua secondo la seguente relazione ingresso-uscita

$$e(t) = e(k) + \frac{e(k) - e(k-1)}{T}(t - kT)$$

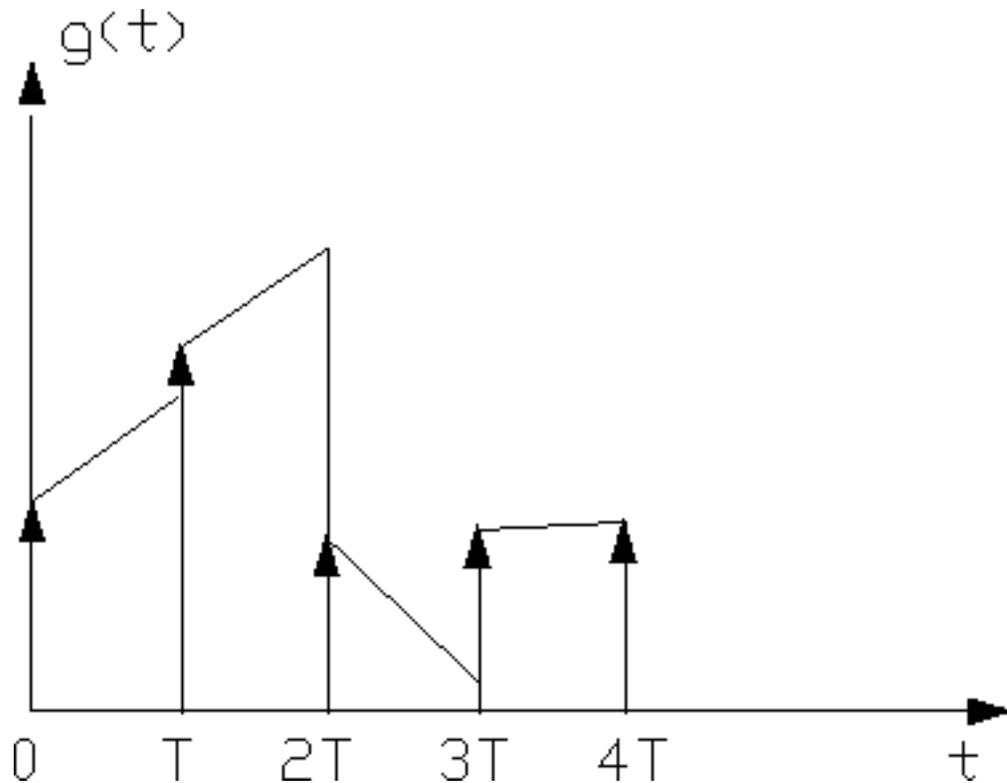


Figure 1.17: Segnale ricostruito (a partire dal segnale digitale) per mezzo di un ricostruttore di ordine uno.

Nella Fig. 1.18 è riportata la risposta impulsiva $g(t)$ del ricostruttore di ordine uno la cui F.d.T. risulta

$$G_{R1}(b) = \frac{1 + Ts}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2 \quad (1.4)$$

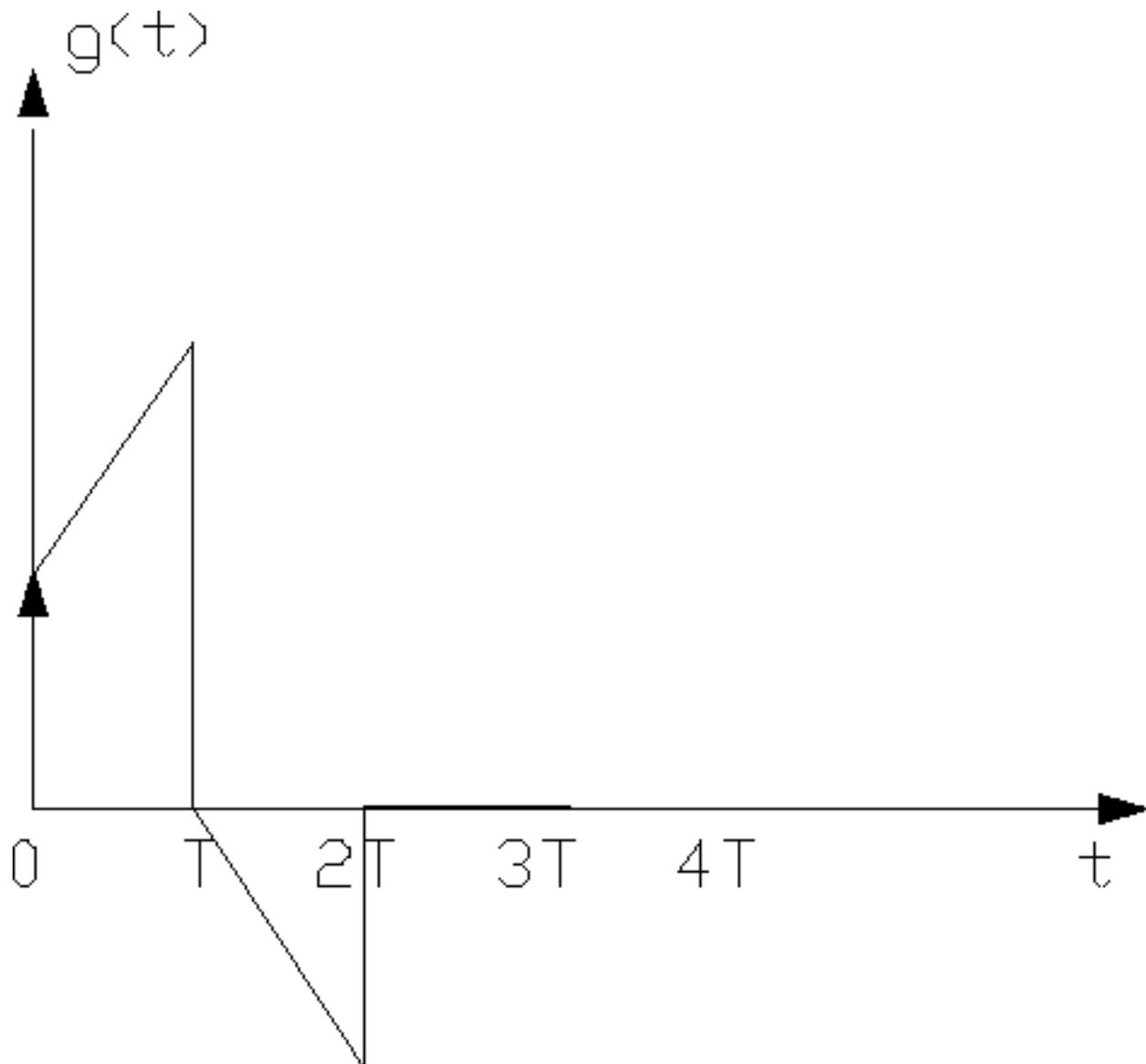


Figure 1.18: Risposta all'impulso unitario del ricostruttore di ordine uno.

Tra gli altri ricostruttori si ricordano

- **Ricostruttore di ordine frazionario** che è una variante del ricostruttore di ordine uno.
- **Ricostruttore "ad uscita continua"** che viene utilizzato per eliminare le variazioni repentine del segnale ricostruito che potrebbero sollecitare eccessivamente l'attuatore.

next

up

previous

Next: [Strumenti matematici: La Z-trasformata](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [Teorema del campionamento di](#)

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

Next: [Operatore ritardo \(unitario\)](#) **Up:** [Sistemi di controllo digitale](#) **Previous:** [La conversione D/A. Ricostruzione](#)

Strumenti matematici: La Z-trasformata

La Z-trasformata, nello studio dei sistemi discreti, gioca lo stesso ruolo della L-trasformata nello studio dei sistemi continui.

Il segnale discreto, come si è visto, è sostanzialmente una sequenza di valori reali $e(kT)$ che può essere schematizzata come una sequenza di funzioni impulsive di "area" $e(kT)$. Si abbia quindi il segnale discreto

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\delta(t - kT)$$

e calcoliamone la L-trasformata

$$\begin{aligned} L(e^*(t)) &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\delta(t - kT)e^{-st} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-skT}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ponendo nella precedente $z = e^{-sT}$ si ottiene la Z-trasformata di $e^*(t)$:

$$z[e(t)] = E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{-k} = L[e^*(t)]_{e^{-sT}=z}. \quad (1.6)$$

Il calcolo della Z-trasformata di una funzione campionata o di una sequenza di valori reali $e(kT)$ è ricondotto al calcolo del valore della serie di potenze [1.6](#), valore che è in genere facilmente determinabile e che, per le funzioni più comuni, è disponibile in tabelle pre-calcolate.

Si noti che tutte le funzioni che negli istanti di campionamento assumono gli stessi valori, hanno la stessa Z-trasformata.

Vediamo ora di determinare, a titolo di esempio, alcune Z-trasformate di semplici funzioni.

Funzione a gradino: $Z[1(t)]$

$$z[1(t)] = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots$$

La serie geometrica in z^{-1} converge al valore

$$z[1(t)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Si ricorda che la Z-trasformata è definita in una regione del piano complesso z detta dominio di convergenza. In questo caso si ha convergenza è per $|z| > 1$.

Funzione esponenziale: $Z[e^{\alpha t}]$

$$z[e^{\alpha t}] = 1 + e^{\alpha T} z^{-1} + e^{2\alpha T} z^{-2} + \dots$$

La serie geometrica in $e^{\alpha T} z^{-1}$ converge al valore:

$$z[e^{\alpha t}] = \frac{1}{1 - e^{\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T}}$$

ed il dominio di convergenza è $|z| > e^{-\text{Re}(d)T}$.

Nella tavola [1.1](#) sono riportate le Z-trasformate di alcune funzioni assieme alle corrispondenti L-trasformate.

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$1/s$	$\frac{z}{z-1}$
t	$1/s^2$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$t^2/2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
t^{k-1}	$\frac{(k-1)!}{s^k}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} \right]$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$t^k e^{-at}$	$\frac{k!}{(s+a)^{k+1}}$	$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} \right]$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z \sin aT}{z^2-2z \cos aT+1}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z \cos aT+1}$
$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2-2ze^{-aT} \cos bT+e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos bT}{z^2-2ze^{-aT} \cos bT+e^{-2aT}}$

Table 1.1: Trasformate S e Z per le funzioni più frequenti.

- [Operatore ritardo \(unitario\)](#) z^{-1}
-

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)

Next: [About this document](#) **Up:** [Strumenti matematici: La Z-trasformata](#) **Previous:** [Strumenti matematici: La Z-trasformata](#)

Operatore ritardo (unitario) z^{-1}

Ipotizziamo ora di avere una sequenza di valori come indicato

$$e(0) = 1, \quad e(T) = 1.5, \quad e(2T) = 0.5, \quad e(3T) = 2, \quad e(4T) = 0 \dots$$

e di non conoscere la funzione del tempo da cui tali campioni sono stati ottenuti. Ci chiediamo ora quale sia la Z-trasformata di tale sequenza. Applicando la [1.6](#) si ottiene facilmente che

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{-k} = \\ &1 + 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2} + 2z^{-3} + 0z^{-4} + \dots = \\ &1 + 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2} + 2z^{-3} \end{aligned}$$

Si noti come le potenze di z^{-1} indichino la "posizione" del campione nella sequenza.

Supponiamo ora di costruire il segnale $e_1(KT)$ ritardando la sequenza $e(kT)$ di un periodo T . La sua Z-trasformata risulta essere

$$\begin{aligned} E_1(z) &= 0 + z^{-1} + 1.5z^{-2} + 0.5z^{-3} + 2z^{-4} = \\ &z^{-1}(1 + 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2} + 2z^{-3}) = \\ &z^{-1}E(z) \end{aligned}$$

La moltiplicazione per z^{-1} corrisponde quindi a ritardare la sequenza di partenza di un periodo di campionamento.

Approfondimento

1. G.F. Franklin - J.D. Powell "Digital Control of Dynamic Systems" - Addison-Wesley Publishing Company
2. C.L. Phillips - H.T. Nagle "Digital Control System Analysis and Design" - Prentice Hall International Editions
3. B. Shanian - M. Massul "Control System Design Using Matlab" - Prentice Hall
4. G.F. Franklin - J.D. Powell - A. Emami - Naeini "Feedback Control of Dynamic Systems" - Addison Wesley
5. G. Marro "Complementi di Controlli Automatici" - Zanichelli
6. C. Bonivento et. al. "Sistemi di Controllo Digitale" Progetto Leonardo - Bologna
7. C.C. Bissel "Control Engineering" - Chapman and Hall

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

Up: [No Title](#) Previous: [Operatore ritardo \(unitario\)](#)

About this document ...

This document was generated using the [LaTeX2HTML](#) translator Version 96.1 (Feb 5, 1996) Copyright © 1993, 1994, 1995, 1996, [Nikos Drakos](#), Computer Based Learning Unit, University of Leeds.

The command line arguments were:

latex2html -debug digital.

The translation was initiated by Domenico Prattichizzo on Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

Domenico Prattichizzo

Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

-
-
-
-
-

Domenico Prattichizzo
Mon Jun 23 00:54:56 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)**Next:** [Contents](#)

- [Contents](#)
- [Tecniche di controllo per i sistemi discreti](#)
 - [Introduzione](#)
 - [La trasformata Z](#)
 - [Proprietà della Trasformata Z Monolatera](#)
 - [Teorema del valore iniziale](#)
 - [Proprietà di traslazione:](#)
 - [Teorema del valore finale](#)
 - [Antitrasformazione](#)
 - [Metodo della divisione](#)
 - [Metodo della scomposizione in fratti semplici](#)
 - [Metodo dell'integrale](#)
 - [Corrispondenza tra le variabili complesse \$s\$ e \$z\$](#)
 - [Caratteristiche della corrispondenza](#) $z = e^{sT}$
 - [Sistemi a dati campionati](#)
 - [iM-Esempio: periodo di campionamento](#)
 - [Dalla L-trasformata alla Z-trasformata](#)
 - [Tecniche di discretizzazione approssimate](#)
 - [Metodo di Eulero](#)
 - [Matched Z Transform](#)
 - [Esempio](#)
 - [Integrazione numerica: metodo dei trapezi](#)
 - [Trasformazione di Tustin](#)
 - [Distorsione Armonica](#)
 - [iM-Esempio: Confronto tra la MZT e la trasformata di Tustin](#)
 - [Sintesi dei controllori discreti](#)
 - [Richiami sulle tecniche di sintesi per i sistemi tempo continuo](#)
 - [Controllo dei sistemi discreti](#)
 - [Metodo Analitico](#)

- [Vincolo dovuto alla Causalità](#)
 - [Vincolo dovuto alla Stabilità](#)
 - [Risposta Impulsiva](#)
 - [Risposta Indiciale](#)
 - [Risposta alla Rampa](#)
 - [Metodo analitico: sintesi](#)
 - [Il metodo del luogo delle radici](#)
 - [Proprietà del luogo delle radici](#)
 - [\$iM\$ -Esempio: sintesi del controllore \(dal tempo continuo al tempo discreto\)](#)
 - [\$iM\$ Sintesi del controllore: un esempio completo](#)
 - [About this document ...](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)Next: [Tecniche di controllo per](#) Up: [No Title](#) Previous: [No Title](#)

Contents

- [Tecniche di controllo per i sistemi discreti](#)
 - [Introduzione](#)
 - [La trasformata Z](#)
 - [Proprietà della Trasformata Z Monolatera](#)
 - [Teorema del valore iniziale](#)
 - [Proprietà di traslazione:](#)
 - [Teorema del valore finale](#)
 - [Antitrasformazione](#)
 - [Metodo della divisione](#)
 - [Metodo della scomposizione in fratti semplici](#)
 - [Metodo dell'integrale](#)
 - [Corrispondenza tra le variabili complesse \$s\$ e \$z\$](#)
 - [Caratteristiche della corrispondenza \$z = e^{sT}\$](#)
 - [Sistemi a dati campionati](#)
 - [iM-Esempio: periodo di campionamento](#)
 - [Dalla L-trasformata alla Z-trasformata](#)
 - [Tecniche di discretizzazione approssimate](#)
 - [Metodo di Eulero](#)
 - [Matched Z Transform](#)
 - [Esempio](#)
 - [Integrazione numerica: metodo dei trapezi](#)
 - [Trasformazione di Tustin](#)
 - [Distorsione Armonica](#)
 - [iM-Esempio: Confronto tra la MZT e la trasformata di Tustin](#)
 - [Sintesi dei controllori discreti](#)
 - [Richiami sulle tecniche di sintesi per i sistemi tempo continuo](#)
 - [Controllo dei sistemi discreti](#)
 - [Metodo Analitico](#)

- [Vincolo dovuto alla Causalità](#)
 - [Vincolo dovuto alla Stabilità](#)
 - [Risposta Impulsiva](#)
 - [Risposta Indiciale](#)
 - [Risposta alla Rampa](#)
 - [Metodo analitico: sintesi](#)
 - [Il metodo del luogo delle radici](#)
 - [Proprietà del luogo delle radici](#)
 - [\$iM\$ -Esempio: sintesi del controllore \(dal tempo continuo al tempo discreto\)](#)
 - [\$iM\$ Sintesi del controllore: un esempio completo](#)
 - [About this document ...](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Introduzione](#) Up: [No Title](#) Previous: [Contents](#)

Tecniche di controllo per i sistemi discreti

- [Introduzione](#)
- [La trasformata Z](#)
 - [Proprietà della Trasformata Z Monolatera](#)
 - [Teorema del valore iniziale](#)
 - [Proprietà di traslazione:](#)
 - [Teorema del valore finale](#)
- [Antitrasformazione](#)
 - [Metodo della divisione](#)
 - [Metodo della scomposizione in fratti semplici](#)
 - [Metodo dell'integrale](#)
 - [Corrispondenza tra le variabili complesse \$s\$ e \$z\$](#)
 - [Caratteristiche della corrispondenza](#) $z = e^{sT}$
- [Sistemi a dati campionati](#)
 - [iM-Esempio: periodo di campionamento](#)
- [Dalla L-trasformata alla Z-trasformata](#)
- [Tecniche di discretizzazione approssimate](#)
 - [Metodo di Eulero](#)
 - [Matched Z Transform](#)
 - [Esempio](#)
 - [Integrazione numerica: metodo dei trapezi](#)
 - [Trasformazione di Tustin](#)
 - [Distorsione Armonica](#)
 - [iM-Esempio: Confronto tra la MZT e la trasformata di Tustin](#)
- [Sintesi dei controllori discreti](#)

- [Richiami sulle tecniche di sintesi per i sistemi tempo continuo](#)
 - [Controllo dei sistemi discreti](#)
 - [Metodo Analitico](#)
 - [Vincolo dovuto alla Causalità](#)
 - [Vincolo dovuto alla Stabilità](#)
 - [Risposta Impulsiva](#)
 - [Risposta Indiciale](#)
 - [Risposta alla Rampa](#)
 - [Metodo analitico: sintesi](#)
 - [Il metodo del luogo delle radici](#)
 - [Proprietà del luogo delle radici](#)
 - [iM-Esempio: sintesi del controllore \(dal tempo continuo al tempo discreto\)](#)
 - [iM Sintesi del controllore: un esempio completo](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [La trasformata Z](#) **Up:** [Tecniche di controllo per](#) **Previous:** [Tecniche di controllo per](#)

Introduzione

L'utilizzo della Z-trasformata consente di risolvere un'equazione alle differenze che descrive la dinamica di un sistema discreto, semplicemente risolvendo un'equazione algebrica.

L'applicazione della Z-trasformata ai sistemi lineari discreti consente di introdurre il concetto di funzione di trasferimento.

Si riprendono ora alcuni concetti legati all'analisi dei sistemi di tipo digitale. Il fine di questo capitolo è quello di fornire degli strumenti per il progetto dei sistemi di controllo digitale date le specifiche di progetto nel tempo (tempo di salita, massima sovraelongazione ...) o in frequenza (banda passante, picco di risonanza ...).

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Proprietà della Trasformata Z](#) Up: [Tecniche di controllo per](#) Previous: [Introduzione](#)

La trasformata Z

Sia data la successione:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots,$$

ed una qualsiasi funzione f_k della variabile complessa z . È quindi possibile associare alla successione la Serie Formale

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z).$$

Alcuni esempi di serie formali sono di seguito riportate:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z^k / k!), \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi k z), \quad \dots$$

La Z-trasformata della successione a_k è definita come quella particolare serie formale con $f_k(z) = z^k$:

$$Z(a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}. \quad (1.1)$$

È semplice verificare che l'operatore di Z-trasformazione è lineare nello spazio delle serie numeriche o dei segnali a dati campionati.

Al fine di rendere utilizzabile (in termini analitici) l'operazione di Z-trasformazione è importante garantire che sia soddisfatta la convergenza della serie (1.1) che definisce la Z-trasformata. Il seguente Teorema di Convergenza ci viene in aiuto:

Teorema 1 *La serie $Z(a_k)$ converge assolutamente all'esterno di una circonferenza di raggio*

$$r = \max(\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k\|^{1/k}) \quad \text{oppure} \quad r = \max(\lim_{k \rightarrow \infty} \|\frac{a_{k+1}}{a_k}\|).$$

Poichè la Z-trasformata è solo uno strumento analitico di analisi dei segnali digitali, è estremamente importante che l'operatore di Z-traformazione goda della proprietà di Invertibilità. Cioè ad una funzione della variabile complessa z deve corrispondere uno ed un solo segnale tempo-discreto. Ciò è garantito dal Teorema di antitrasformazione:

Teorema 2 Data una funzione $G(z)$ analitica nella regione $\|z\| > r$, esiste ed è unica la successione $g(k)$ tale che $G(z) = Z(g(k))$, e

$$g(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} G(z) dz$$

essendo Γ una curva semplice, chiusa, antioraria, giacente nella regione di convergenza e contenente l'origine.

Le regioni di convergenza dei segnali tempo discreti che si incontrano più comunemente sono riportati nella tabella [1.1](#)

$f(k)$ per $k \geq 0$	Z-trasformata
1	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
k	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
k^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\frac{a^k}{k!}$	$e^{az^{-1}}$

Table 1.1: Trasformate S e Z per le funzioni più frequenti.

- [Proprietà della Trasformata Z Monolatera](#)
 - [Teorema del valore iniziale](#)
 - [Proprietà di traslazione:](#)
 - [Teorema del valore finale](#)

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Teorema del valore iniziale](#) Up: [La trasformata Z](#) Previous: [La trasformata Z](#)

Proprietà della Trasformata Z Monolatera

In questo paragrafo si riportano brevemente alcune proprietà fondamentali della trasformata Z.

-
- [Teorema del valore iniziale](#)
 - [Proprietà di traslazione:](#)
 - [Teorema del valore finale](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

[contents](#)

Next: [Proprietà di traslazione](#): **Up:** [Proprietà della Trasformata Z](#) **Previous:** [Proprietà della Trasformata Z](#)

Teorema del valore iniziale

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3}$$

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Teorema del valore finale](#) **Up:** [Proprietà della Trasformata Z](#) **Previous:** [Teorema del valore iniziale](#)

Proprietà di traslazione:

$$\begin{aligned} Z(g(k)) &= Z(f(k+1)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k-1} = z \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} - f(0) \right) \\ &= zF(z) - zf(0) \end{aligned}$$

e in generale,

$$Z(g(k)) = Z(f(k+m)) = z^m F(z) - \sum_{j=0}^{m-1} f(j)z^{m-j}$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Antitrasformazione](#) **Up:** [Proprietà della Trasformata Z](#) **Previous:** [Proprietà di traslazione:](#)

Teorema del valore finale

$$Z[f(k+1) - f(k)] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m [f(k+1) - f(k)]z^{-k}$$

$$(z-1)F(z) - zf(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m [f(k+1) - f(k)]z^{-k}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)F(z) - zf(0)) = \lim_{m \rightarrow \infty} [f(m+1) - f(0)]$$

$$f(\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(m+1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Metodo della divisione](#) Up: [Tecniche di controllo per](#) Previous: [Teorema del valore finale](#)

Antitrasformazione

Per antitrasformare una funzione della variabile complessa z , e quindi ritornare nel dominio del tempo si utilizzano tipicamente i seguenti metodi.

- Metodo della divisione ([1.3.1](#));
- Metodo della scomposizione in fratti semplici ([1.3.2](#));
- Metodo dell'integrale ([1.3.3](#)).

-
- [Metodo della divisione](#)
 - [Metodo della scomposizione in fratti semplici](#)
 - [Metodo dell'integrale](#)
 - [Corrispondenza tra le variabili complesse \$s\$ e \$z\$](#)

- [Caratteristiche della corrispondenza](#) $z = e^{sT}$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Metodo della scomposizione in](#) Up: [Antitrasformazione](#) Previous: [Antitrasformazione](#)

Metodo della divisione

La trasformata Z di un segnale è rappresentata da un rapporto di polinomi. Con questo metodo per passare nel dominio del tempo si divide direttamente il numeratore di $F(z)$ per il denominatore di $F(z)$. È ovviamente una divisione tra polinomi.

Esempio 1

$$F(z) = \frac{z^{-1} - 3}{z^{-2} - 2z + 1}.$$

Trovare la successione $f(k)$ a cui corrisponde la $F(z)$.

Si trasformi la $F(z)$ nel seguente modo:

$$F(z) = \frac{-3z^{-2} + z}{z^{-2} - 2z + 1}.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene:

$$F(z) = -3 - 5z^{-1} - 7z^{-2} - 9z^{-3} - 11z^{-4}.$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Metodo dell'integrale](#) Up: [Antitrasformazione](#) Previous: [Metodo della divisione](#)

Metodo della scomposizione in fratti semplici

Questo metodo è probabilmente il più conosciuto per l'antitrasformazione. La Z-trasformata che è un rapporto tra polinomi può essere scomposta in fratti semplici.

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) + \dots + F_q(z),$$

dove q è il numero di poli distinti della funzione $F(z)$ che deve essere strettamente propria (grado del numeratore minore del grado del denominatore). Ogni funzione $F_i(z)$ della espansione in fratti semplici è una funzione elementare che ha il polo locato in $z=a$ e può essere di grado uno, due Le funzioni elementari $F(z)$ sono scritte in modo tale che i loro termini siano nella forma riportata nella tabella [1.2](#)

Termine della Z-trasformata	Serie temporale
$\frac{1}{z-a}$	a^{k-1}
$\frac{z}{(z-a)^2}$	$k a^{k-1}$
$\frac{z(z+a)}{(z-a)^3}$	$k^2 a^{k-1}$
$\frac{z(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$k^3 a^{k-1}$
$\frac{z(z^3+11az^2+11a^2z+a^3)}{(z-a)^5}$	$k^4 a^{k-1}$

Table 1.2: Antitrasformate dei termini elementari.

La funzione elementare, relativa alla singolarità α_i , della scomposizione in fratti semplici assume la forma

$$F_i(z) = b_3 \frac{z(z + \alpha_i)}{(z - \alpha_i)^3} + b_2 \frac{z}{(z - \alpha_i)^2} + b_1 \frac{1}{(z - \alpha_i)},$$

dove i coefficienti b_1 , b_2 e b_3 sono calcolati con i metodi standard. Ad esempio:

$$b_3 = \frac{(z - a_i)^3}{z(z + a_i)} F(z) \Big|_{z=a_i}.$$

Esempio 2 Determinare $f(k)$ data la sua Z-trasformata

$$F(z) = \frac{-3z^3 + z^2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}.$$

Poichè la $F(z)$ non è strattamente propria, si deve eseguire una divisione tra il numeratore ed il denominatore

$$F(z) = -3 + \frac{-11z^2 + 15z - 6}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}.$$

$F(z)$ ha un polo singolo in $z = 2$ ed un polo doppio in $z = 1$. Facendo una espansione alle frazioni parziali si ottiene

$$F(z) = -3 + b_2 \frac{z}{(z-1)^2} + b_1 \frac{1}{(z-1)} + c_1 \frac{1}{(z-2)}.$$

Eseguendo i calcoli si ha che

$$b_1 = 7 \quad b_2 = 2, \quad c_1 = 20,$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(k) &= 0; & k < 0; \\ f(0) &= 3; & k = 0; \\ f(k) &= 2k(1)^{k-1} + 7(1)^{k-1} - 20(2)^{k-1} \\ &= 2k + 7 - 20(2)^{k-1}. & k \geq 1. \end{aligned}$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Corrispondenza tra le variabili](#) **Up:** [Antitrasformazione](#) **Previous:** [Metodo della scomposizione in](#)

Metodo dell'integrale

La tecnica più generale per ottenere l'inversione della Z-trasformata é il metodo dell'integrale di inversione. Questo metodo utilizza alcuni concetti della teoria delle variabili complesse che non verranno trattati nelle presenti dispense. È sufficiente ricordare che la formula dell'integrale di inversione è:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz.$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Caratteristiche della corrispondenza](#) Up: [Antitrasformazione](#) Previous: [Metodo dell'integrale](#)

Corrispondenza tra le variabili complesse s e z

Il segnale a dati campionati può essere visto come una successione estratta da un segnale tempo continuo. Con questo approccio si può studiare la corrispondenza tra la trasformata di Laplace e la trasformata Z .

La successione estratte a_k è ottenuta per campionamento della $g(t)$ con periodo di campionamento pari a T . Per formalizzare questo concetto ci si avvale della funzione δ di Dirac:

$$a_k = g(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - kT)dt.$$

La Z -trasformata della Successione Estratta è

$$G_T(z) = Z[g(t), T] = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-kT/T}.$$

Se esiste il limite

$$G(z) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-kT/T} = \int_0^{\infty} g(t)z^{-t} dt$$

ponendo

$$z = e^{sT}$$

si ottiene che la trasformata Z coincide con la trasformata di Laplace della successione estratta:

$$G(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \mathcal{L}(g(t)) = G(s).$$

Si è quindi detto che c'è una corrispondenza tra le variabili complesse z ed s rispettivamente legate alla trasformata di Laplace ed alla trasformata z ,

$$z = e^{sT}$$

dove T è il periodo di campionamento.

Il seguente m-file di Matlab consente di eseguire il plot riportato in Fig. [1.1](#) dove sono riportate, nel semipiano $\text{Re}(z) > 0$ le curve che descrivono nel piano s i luoghi a smorzamenti ξ costanti ed i luoghi con frequenze naturali ω_n costanti.

Matlab code - drag and drop:

```
\begin{quote}\begin{verbatim}
%% natfrdmp.m
%% m-file per Matlab
axis('square')
zgrid('new')
plot([-1 1],[0 0])
plot([0 0],[-1 1])
xlabel('Re(z)')
ylabel('Im(z)')
axis('normal')
hold off
```

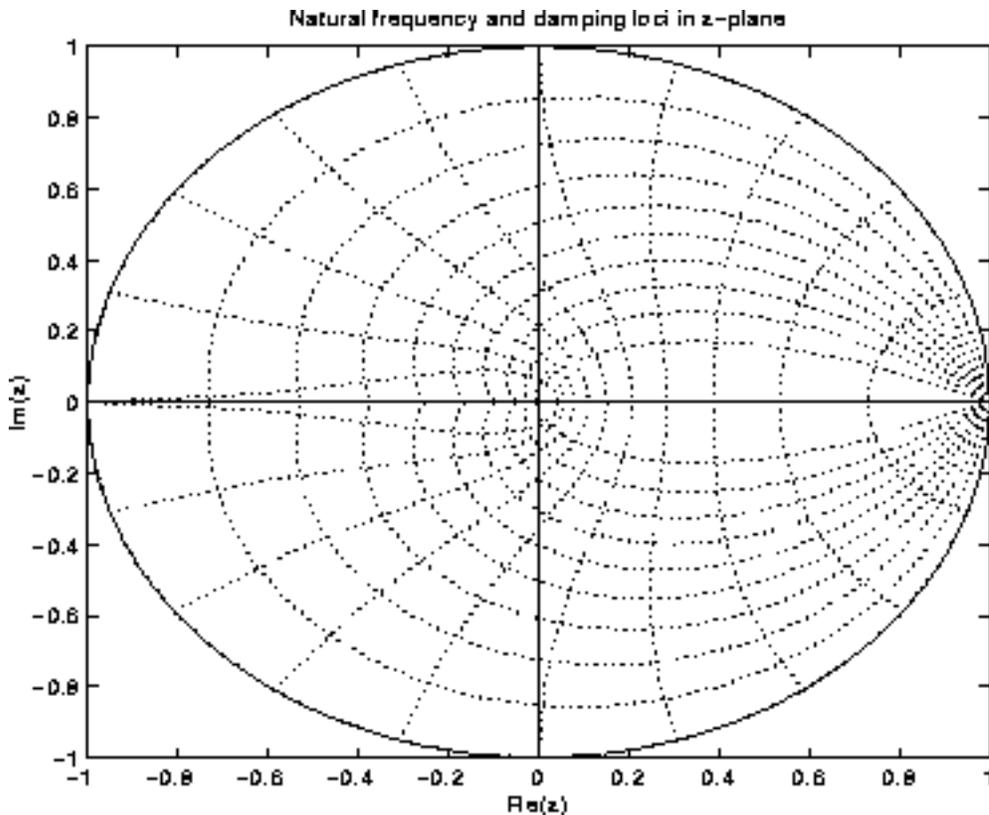


Figure 1.1: Luoghi a frequenza naturale e smorzamento costanti (piano s) nel piano della variabile complessa z .

-
- [Caratteristiche della corrispondenza](#) $z = e^{sT}$
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Sistemi a dati campionati](#) **Up:** [Corrispondenza tra le variabili](#) **Previous:** [Corrispondenza tra le variabili](#)

Caratteristiche della corrispondenza $z = e^{sT}$

La relazione $z = e^{sT}$ mappa la regione di stabilità del dominio tempo-continuo nel cerchio unitario del piano z che diventa quindi la regione di stabilità per i sistemi tempo discreti. Inoltre

- $1 = e^{0T}$, quindi la regione prossima al punto $z=+1$ corrisponde (nel piano s) alla regione prossima a $s=0$ polo nell'origine;
- La locazione delle singolarità nel piano z da informazioni sulle risposte del sistema normalizzate rispetto al tempo di campionamento;
- Le linee verticali del semipiano stabile del piano s si mappano su delle circonferenze all'interno del cerchio unitario nel piano z .
- Singolarità in prossimità dell'origine del piano z corrispondono a pulsazioni con modulo infinito nel piano s . Ciò implica che si avranno delle risposte impulsive che si esauriscono rapidamente. Nel caso in cui il sistema tempo-discreto abbia tutte le singolarità nell'origine si ottiene un filtro di tipo FIR: Finite Impulse Response. Cioè la sua risposta transitoria si esaurisce in un numero finito di passi. A tal proposito si ricorda che per i sistemi tempo-continuo non esiste l'analogo del filtro FIR in quanto non è possibile allocare fisicamente i poli del filtro in $-\infty$ sull'asse reale del piano s .

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [iM-Esempio: periodo di campionamento](#) **Up:** [Tecniche di controllo per](#) **Previous:** [Caratteristiche della corrispondenza](#)

Sistemi a dati campionati

Si vuole controllare un sistema tempo continuo (motore, robot, impianto industriale, ...) utilizzando un controllore tempo discreto (computer).

Si sceglie come convertitore D/A il dispositivo "Zero Order Hold"

Lo schema a blocchi cui si fa riferimento consiste di un controllore discreto $C(z)$, seguito da un convertitore D/A del tipo ZOH e da un processo tempo continuo da controllare. Il tutto chiuso con una retroazione unitaria negativa.

Effettuare un'analisi del **Sistemi a Dati Campionati** corrisponde a studiare il sistema tempo continuo facendo riferimento al suo modello tempo discreto.

La frequenza di campionamento deve essere più alta della frequenza "massima" del sistema. Il limite teorico è fornito dal teorema di Shannon:

$$f_c \geq 2 f_{max}.$$

La frequenza di campionamento è limitata superiormente dai limiti tecnologici (conversione A/D, elaborazione del segnale numerico, conversione D/A). Si può parzialmente rimediare a tale inconveniente realizzando dei codici in linguaggio macchina piuttosto che con linguaggi ad alti livelli.

Si deve quindi calcolare la Z-trasformata della serie del convertitore D/A e del processo tempo continuo $P(s)$. Chiameremo questa trasformata $P(z)$ che può essere così calcolata

$$P(z) = Z \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right) = (1 - z^{-1}) Z \left(\frac{P(s)}{s} \right) \quad (1.2)$$

-
- [iM-Esempio: periodo di campionamento](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Dalla L-trasformata alla Z-trasformata](#) **Up:** [Sistemi a dati campionati](#) **Previous:** [Sistemi a dati campionati](#)

iM-Esempio: periodo di campionamento

In questo paragrafo si riporta un esempio per mostrare cosa succede quando si usano due diversi periodi di campionamento.

1) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

compensata dal seguente controllore:

$$D(s) = 70 \frac{s+2}{s+10},$$

si determini la risposta al gradino del sistema in anello chiuso (retroazione negativa) per il sistema continuo. Il seguente m-file genera la risposta impulsiva riportata in Fig. [1.2](#)

Matlab code - drag and drop:

```
% m-file: rimpssc.m

hold off
numG=1; denG=[1 1 0];
Ko=70;
numD=Ko*[1 2];
denD=[1 10];
num=conv(numG,numD);
den=conv(denG,denD);
[numcl,dencl]=feedback(num,den,1,1);
tf=1;
t=0:.01:tf;
yc=step(numcl,dencl,t);
axis([0 1 0 1.5])
plot(t,yc,'-'),grid
xlabel('tempo')
ylabel('risposta al gradino, sistema tempo continuo')
hold off
```

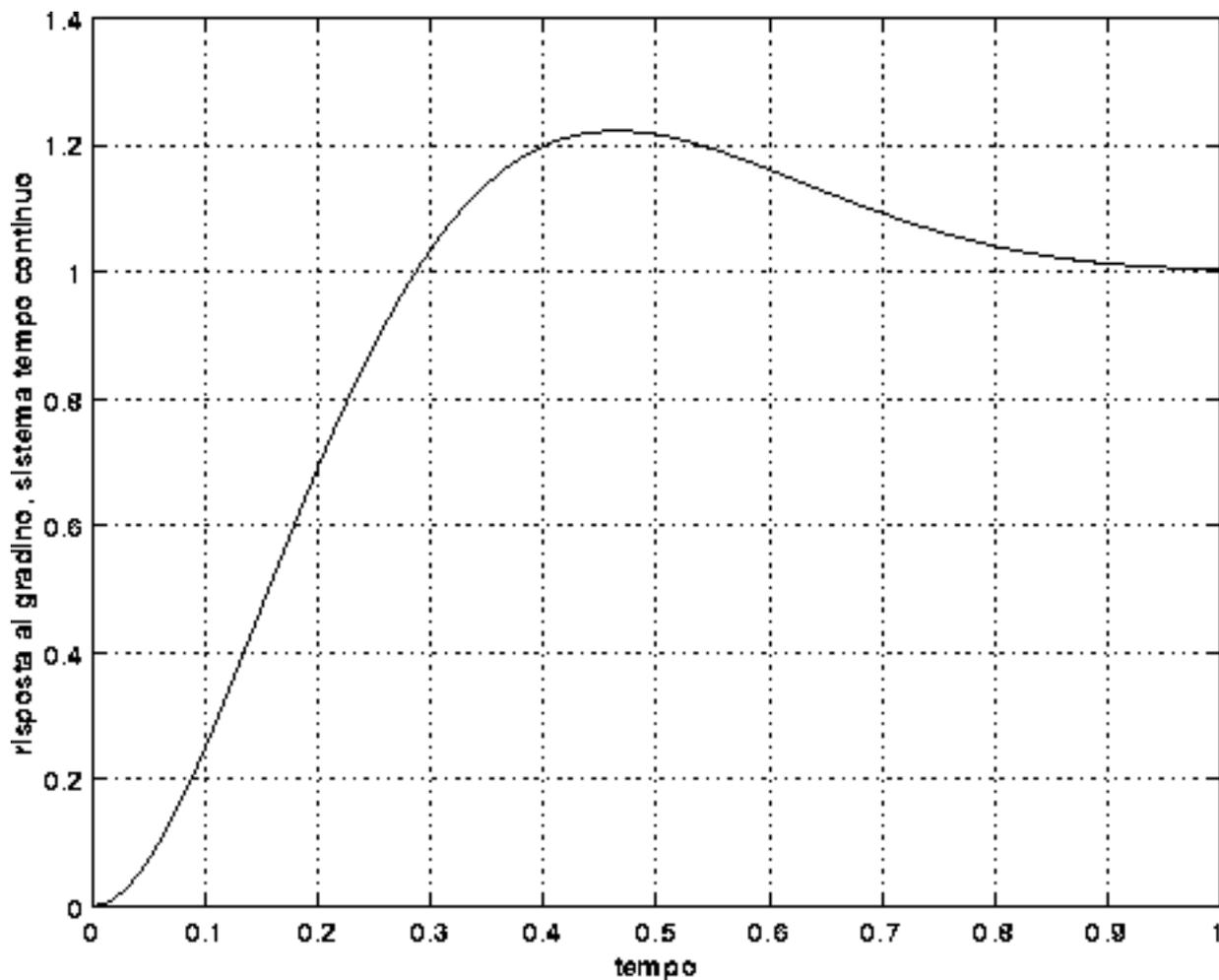


Figure 1.2: Risposta al gradino di $\frac{G}{1+DG}$

Quindi si effettui la discretizzazione del sistema con uno ZOH ed una frequenza di campionamento pari a 20Hz e 40Hz. Il campionamento a 40Hz fornisce una migliore approssimazione (discreta) della funzione di risposta al gradino del sistema in retroazione, come si evince da un confronto della Fig. [1.3](#) e Fig. [1.4](#) generate rispettivamente con i seguenti codici Matlab.

Matlab code - drag and drop:

```
% m-file: twenty.m

hold off
numG=1; denG=[1 1 0];
Ko=70;
numD=Ko*[1 2];
denD=[1 10];
num=conv(numG,numD);
den=conv(denG,denD);
[numcl,dencl]=feedback(num,den,1,1);
tf=1;
t=0:.01:tf;
yc=step(numcl,dencl,t);
```

```
axis([0 1 0 1.5])
% digitale
Ws= 20; % Hz
T=1/Ws;
[numGd,denGd]=c2dm(numG,denG,T,'zoh');
a=2;
b=10;
numDd=Ko*[1 -(1-a*T)];
denDd=[1 -(1-b*T)];
numd=conv(numGd,numDd);
dend=conv(denGd,denDd);
[numcld,dencld]=feedback(numd,dend,1,1);
N=tf*Ws;
yd=dstep(numcld,dencld,N);
td=0:T:(N-1)*T;
plot(td,yd,'*')
hold on
plot(td,yd,'-')
plot(t,yc)
xlabel('tempo (sec)')
ylabel('risposta sis. tempo continuo e discreto (Ws=20)')
hold off
```

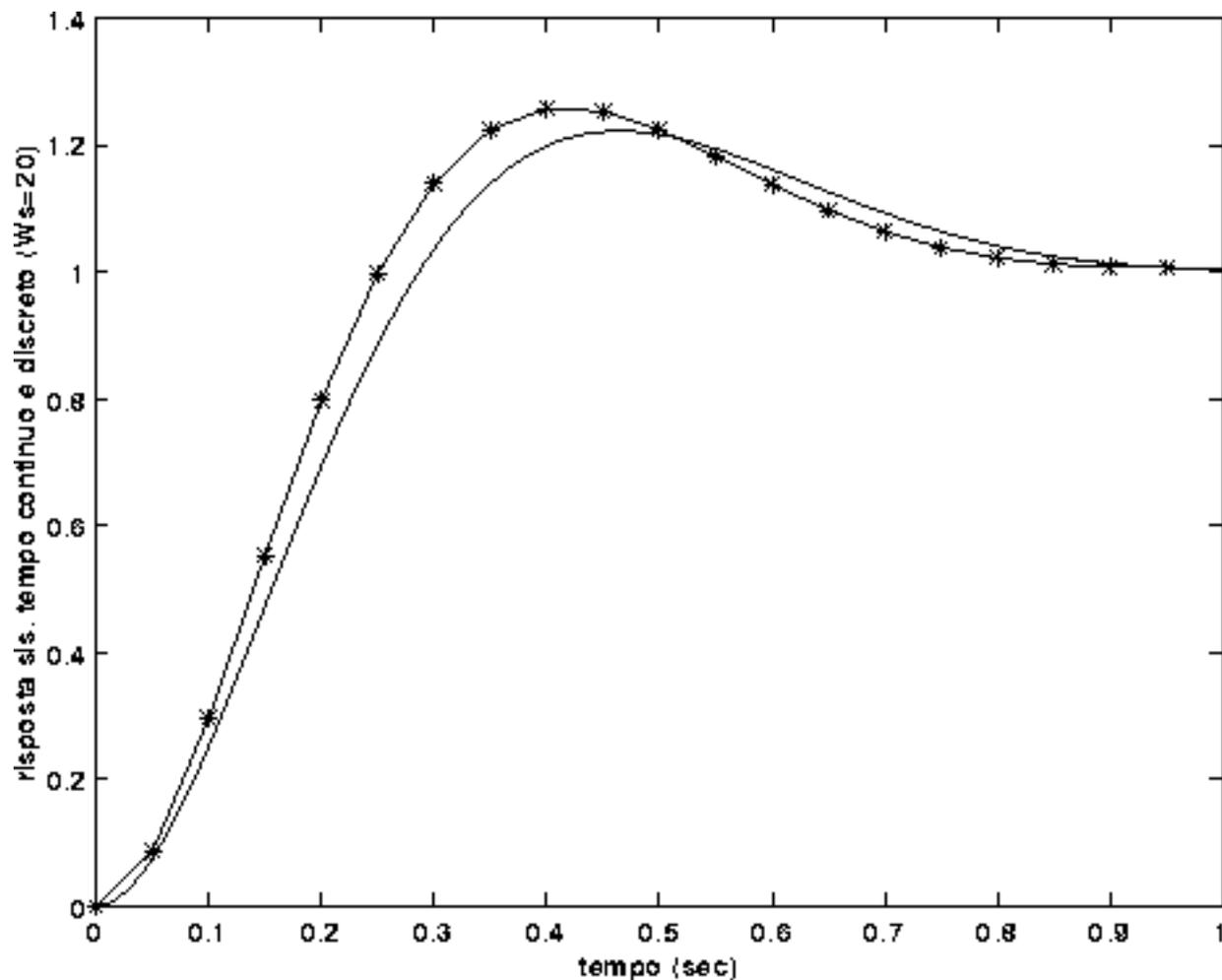


Figure 1.3: Risposta al gradino del sistema tempo continuo e tempo discreto. Frequenza di campionamento: 20Hz.

Matlab code - drag and drop:

```
% m-file: forty.m

hold off
numG=1; denG=[1 1 0];
Ko=70;
numD=Ko*[1 2];
denD=[1 10];
num=conv(numG,numD);
den=conv(denG,denD);
[numcl,dencl]=feedback(num,den,1,1);
tf=1;
t=0:.01:tf;
yc=step(numcl,dencl,t);
axis([0 1 0 1.5])
% digitale
Ws= 40; % Hz
T=1/Ws;
[numGd,denGd]=c2dm(numG,denG,T,'zoh');
```

```

a=2;
b=10;
numDd=Ko*[1 -(1-a*T)];
denDd=[1 -(1-b*T)];
numd=conv(numGd,numDd);
dend=conv(denGd,denDd);
[numcld,dencld]=feedback(numd,dend,1,1);
N=tf*Ws;
yd=dstep(numcld,dencld,N);
td=0:T:(N-1)*T;
plot(td,yd,'*')
hold on
plot(td,yd,'-')
plot(t,yc)
xlabel('tempo (sec)')
ylabel('risposta sis. tempo continuo e discreto (Ws=40)')
hold off

```

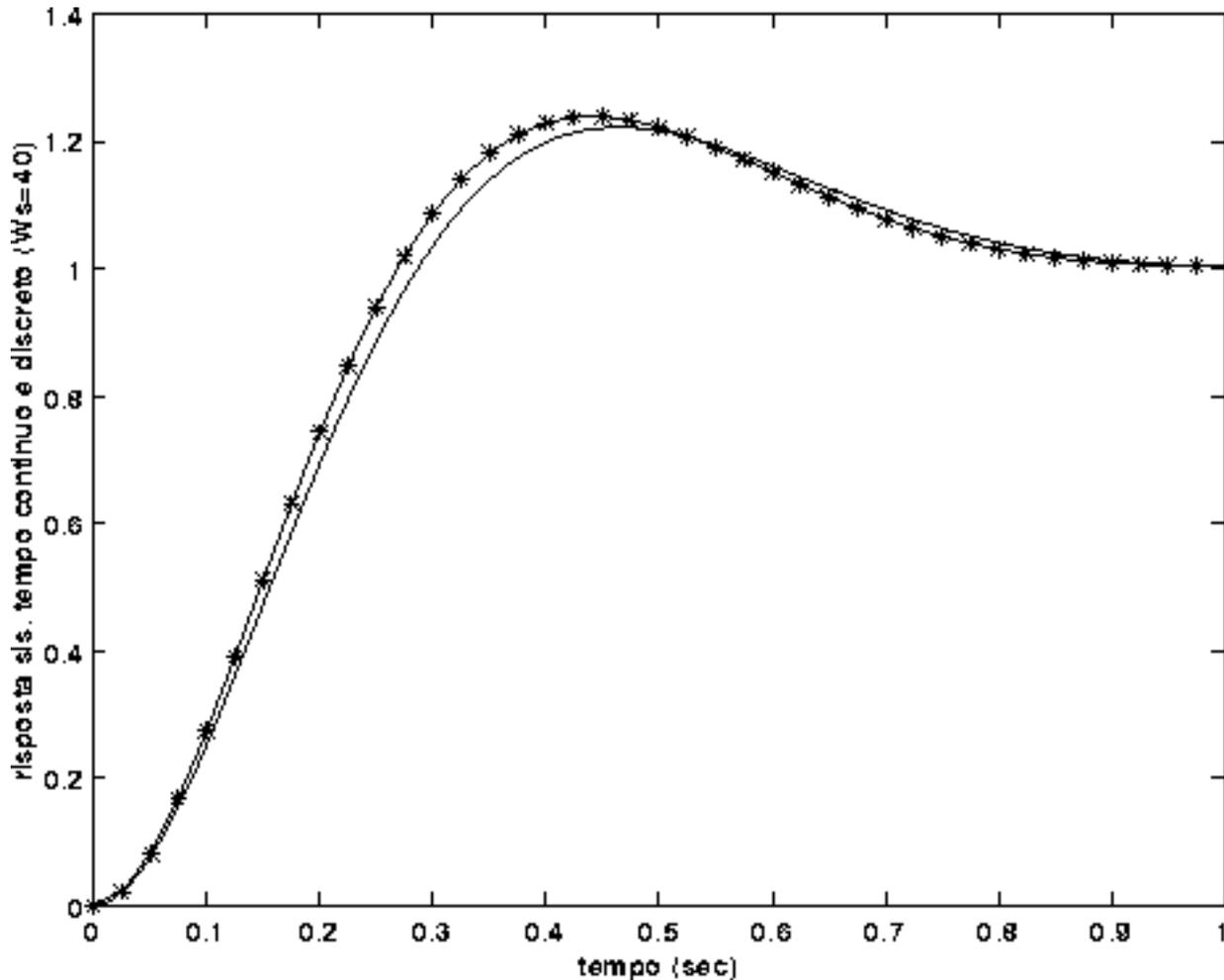


Figure 1.4: Risposta al gradino del sistema tempo continuo e tempo discreto. Frequenza di campionamento: 40Hz.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

[contents](#)

Next: [Tecniche di discretizzazione approssimate](#) **Up:** [Tecniche di controllo per](#) **Previous:** [iM-Esempio: periodo di campionamento](#)

Dalla L-trasformata alla Z-trasformata

Rimane quindi da risolvere il problema di calcolare la Z-trasformata di $\frac{P(s)}{s}$, cf.(1.2). Per fare ciò

esistono delle tecniche esatte come la

- zero order hold equivalence

e delle tecniche approssimate

- metodo di Eulero
- matched Z-transform
- trasformata di Tustin
- traformata di Tustin con il prewarping

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Metodo di Eulero](#) Up: [Tecniche di controllo per](#) Previous: [Dalla L-trasformata alla Z-trasformata](#)

Tecniche di discretizzazione approssimate

- [Metodo di Eulero](#)
 - [Matched Z Transform](#)
 - [Esempio](#)
 - [Integrazione numerica: metodo dei trapezi](#)
 - [Trasformazione di Tustin](#)
 - [Distorsione Armonica](#)
 - [iM-Esempio: Confronto tra la MZT e la trasformata di Tustin](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Matched Z Transform](#) **Up:** [Tecniche di discretizzazione approssimate](#) **Previous:** [Tecniche di discretizzazione approssimate](#)

Metodo di Eulero

Con il metodo di Eulero semplicemente si approssima la derivata del segnale $y(t)$ per $t=kT$ con il rapporto incrementale per il precedente periodo di campionamento

$$\dot{y}(kT) = \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T}.$$

Per ottenere l'equazione alle differenze si può sostituire direttamente questa approssimazione nell'equazione differenziale che governa il sistema.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Esempio](#) Up: [Tecniche di discretizzazione approssimate](#) Previous: [Metodo di Eulero](#)

Matched Z Transform

È ancora una tecnica di discretizzazione approssimata che segue però un diverso approccio.

In particolare con la *matched z transform* si fanno corrispondere agli zeri ed ai poli della f.d.t. $G(s)$, gli zeri ed i poli della f.d.t. discreta $G(z)$ calcolati secondo la corrispondenza $z = e^{sT}$.

Sebbene si parta da una $G(s)$ propria, è possibile che dopo aver portato a termine questa operazione si ottenga una funzione di trasferimento in z in cui il grado del denominatore sia maggiore del grado del denominatore. Per ovviare a questo inconveniente si devono aggiungere al numeratore tanti termini del tipo $(1 + z^{-1})$ fino a quando la nuova $G(z)$ non risulti essere propria.

Inoltre con questa tecnica di discretizzazione si deve porre attenzione al guadagno statico che non viene conservato con la trasformazione. Si deve quindi premoltiplicare il filtro numerico ottenuto con un fattore correttivo:

$$\frac{G(s) \Big|_{s=0}}{G(z) \Big|_{z=1}}$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Integrazione numerica: metodo dei](#) **Up:** [Tecniche di discretizzazione approssimate](#) **Previous:** [Matched Z Transform](#)

Esempio

Con riferimento alla funzione di trasferimento $G(s)$ ed al suo controllore $D(s)$ dell'esempio interattivo [1.4.1](#), in questo paragrafo mostreremo la differenza tra le due precedenti tecniche di discretizzazione: *Eulero* e *Matched Z Transform*.

Al sistema in retroazione negativa $\frac{G}{1+DG}$, discretizzato con i due suddetti metodi ad una frequenza di campionamento di 15Hz, sono associate le due risposte al gradino riportate in Fig. [1.5](#) e generate con il seguente codice matlab.

Matlab code - drag and drop:

```
% M-file: comparison.m
numG=1;
denG=[1 1 0];

Ko=70;
numD=Ko*[1 2];
denD=[1 10];

num=conv(numG,numD);
den=conv(denG,denD);

[numcl,dencl]=feedback(num,den,1,1);
tf=1;
t=0:.01:tf;
yc=step(numcl,dencl,t);
axis([0 1 0 1.6])
plot(t,yc,'-'),grid
hold on
% digital

Ws= 15; % Hz
T=1/Ws;
[numGd,denGd]=c2dm(numG,denG,T,'zoh');
a=2;
b=10;

% Metodo di Eulero
```

```
numDd=Ko*[1 -(1-a*T)]
denDd=[1 -(1-b*T)]
numd=conv(numGd,numDd);
dend=conv(denGd,denDd);
[numcld,dencld]=feedback(numd,dend,1,1);

N=tf*Ws+1;
yd=dstep(numcld,dencld,N);
td=0:T:(N-1)*T;
plot(td,yd,'*')
plot(td,yd,'-')
xlabel('tempo (sec)')
ylabel('risposta al gradino, casi continuo e discreto')

% Matched Z Trasform

[numDd,denDd]=c2dm(numD,denD,T,'matched')
numd=conv(numGd,numDd);
dend=conv(denGd,denDd);
[numcld,dencld]=feedback(numd,dend,1,1);
yd=dstep(numcld,dencld,N);
plot(td,yd,'o')
plot(td,yd,'-')
hold off
```

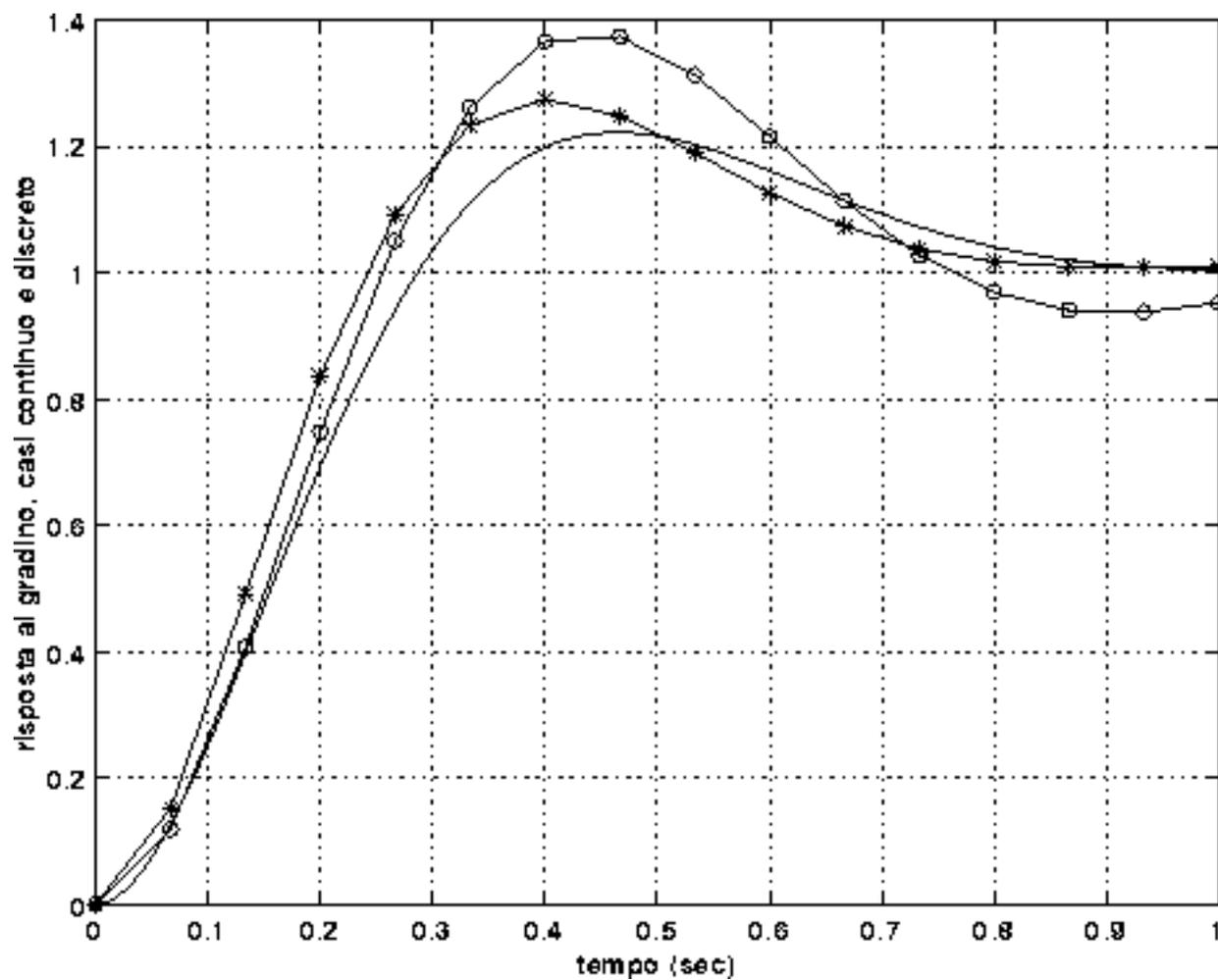


Figure 1.5: Risposta al gradino nel caso discreto (15Hz) con i metodi Matched Pole-Zero (o---) e di Euler (*---) e per il caso tempo continuo (---).

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Trasformazione di Tustin](#) Up: [Tecniche di discretizzazione approssimate](#) Previous: [Esempio](#)

Integrazione numerica: metodo dei trapezi

Sia $y(t)$ l'integrale di $u(t)$ e $y(kT)$ la sua approssimazione discreta. È possibile calcolare l'approssimazione discreta (di $y(t)$) $y(kT)$ utilizzando la formula dei trapezi:

$$y(kT) = y(kT - T) + \frac{T}{2}(u(kT) + u(kT - T))$$

La f.d.t. in z risulta:

$$W(z) = \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$

e la risposta armonica è:

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{j\omega} \frac{\omega T/2}{\tan(\omega T/2)}$$

La regola dei trapezi corrisponde all'operatore $\frac{1}{j\omega}$ nel caso continuo a meno di un fattore di distorsione.

L'approssimazione considerata è valida se è soddisfatta la condizione

$$\frac{\omega T}{2} \ll 1$$

dove con ω si intendono le frequenze significative del segnale da approssimare.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Distorsione Armonica](#) **Up:** [Tecniche di discretizzazione approssimate](#) **Previous:** [Integrazione numerica: metodo dei](#)

Trasformazione di Tustin

Ricordando che l'operazione di integrazione corrisponde all'operatore $1/s$, è possibile calcolare dal precedente paragrafo la Trasformata bilineare o di Tustin che mappa s in z e viceversa secondo la formula dei trapezi.

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (1.3)$$

$$z = \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \quad (1.4)$$

L'uso della trasformazione di Tustin è di estrema importanza nella discretizzazione dei sistemi in quanto essa permette di passare da espressioni polinomiali in s ad espressioni polinomiali in z e viceversa. Ciò non sarebbe possibile se si usasse la relazione esatta

$$z = e^{sT}$$

La trasformazione di Tustin è una trasformazione bilineare che

1. mappa cerchi in cerchi e
2. mappa l'asse immaginario del piano s nella circonferenza di raggio unitario.

Quest'ultima proprietà è rilevante in quanto preserva la proprietà di stabilità nel passaggio dal tempo continuo al tempo discreto.

Esistono altre approssimazioni di $z = e^{sT}$ che non conservano la proprietà di stabilità.

La trasformata di Tustin non presenta il fenomeno dell'aliasing che è invece presente nella relazione $z = e^{sT}$

La trasformata di Tustin è una tecnica di discretizzazione approssimata per ottenere un filtro numerico ed in particolare data una $G(s)$ il corrispondente filtro numerico è:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

-
- [Distorsione Armonica](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [iM-Esempio: Confronto tra la](#) **Up:** [Trasformazione di Tustin](#) **Previous:** [Trasformazione di Tustin](#)

Distorsione Armonica

Data una $G(j\omega)$, si esegua la trasformazione di Tustin diretta (1.3), poi si torni al tempo continuo (in modo esatto). La distorsione in frequenza che si genera con la trasformazione bilineare è

$$\omega' = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

Cioè la generica pulsazione ω si trasforma in ω' .

Ovviamente tutte le pulsazioni subiscono distorsioni ma quelle che più ci interessano sono le distorsioni dei punti di rottura dei filtri.

Se il filtro è passa basso, la sua discretizzazione potrebbe dare origine ad una distorsione del punto di rottura e quindi della banda passante. Per ovviare a tale inconveniente si utilizzano delle tecniche di predistorsione. Si effettua una predistorsione del filtro che una volta discretizzato compenserà la distorsione della trasformazione bilineare.

Le tecniche di predistorsione prendono il nome di *frequency prewarping*:

La singolarità (\hat{s}) della f.d.t. $G(s)$ è predistorta con la legge

$$\hat{s}' = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\hat{s}T}{2}\right)$$

quindi si applica la trasformata di Tustin

$$G(z) = G(s) \Big|_{s \rightarrow s', \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}.$$

Si osservi che a causa del prewarping si perde la corrispondenza tra i guadagni statici, quindi dopo aver eseguito la discretizzazione si deve premoltiplicare il filtro numerico con un fattore correttivo:

$$\frac{G(s) \Big|_{s=0}}{G(z) \Big|_{z=1}}.$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Sintesi dei controllori discreti](#) **Up:** [Tecniche di discretizzazione approssimate](#) **Previous:** [Distorsione Armonica](#)

iM-Esempio: Confronto tra la MZT e la trasformata di Tustin

In questo paragrafo si esegue un confronto tra due tecniche di discretizzazione: la Matched Z Transform ([1.6.2](#)) e la trasformata di Tustin ([1.6.5](#)).

Si consideri la funzione di trasferimento per un sistema passa basso del primo ordine:

$$D(s) = \frac{5}{s + 5}$$

e si esegua la discretizzazione con questi metodi alle pulsazioni di campionamento di 100rad/sec e di 20 rad/sec.

Le Fig. [1.6](#) e Fig. [1.7](#) mostrano come entrambi i metodi si comportano bene per pulsazioni inferiori a circa 1/4 della pulsazione di campionamento.

Ovviamente nel caso in cui la pulsazione di campionamento è più alta del punto di rottura quest'ultimo sarà accuratamente riprodotto anche dopo la discretizzazione.

Con una pulsazione di campionamento pari a 100rad/sec si ottengono le seguenti approssimazioni, praticamente identiche.

MZT	Tustin
$0.143 \frac{s+1}{s-0.715}$	$0.143 \frac{s+1}{s-0.713}$

Si confronti la Fig. [1.6](#).

Con una pulsazione di campionamento pari a 20rad/sec si ottengono le seguenti approssimazioni:

MZT	Tustin
$0.405 \frac{s+1}{s-0.189}$	$0.454 \frac{s+1}{s-0.0914}$

Si confronti la Fig. [1.7](#).

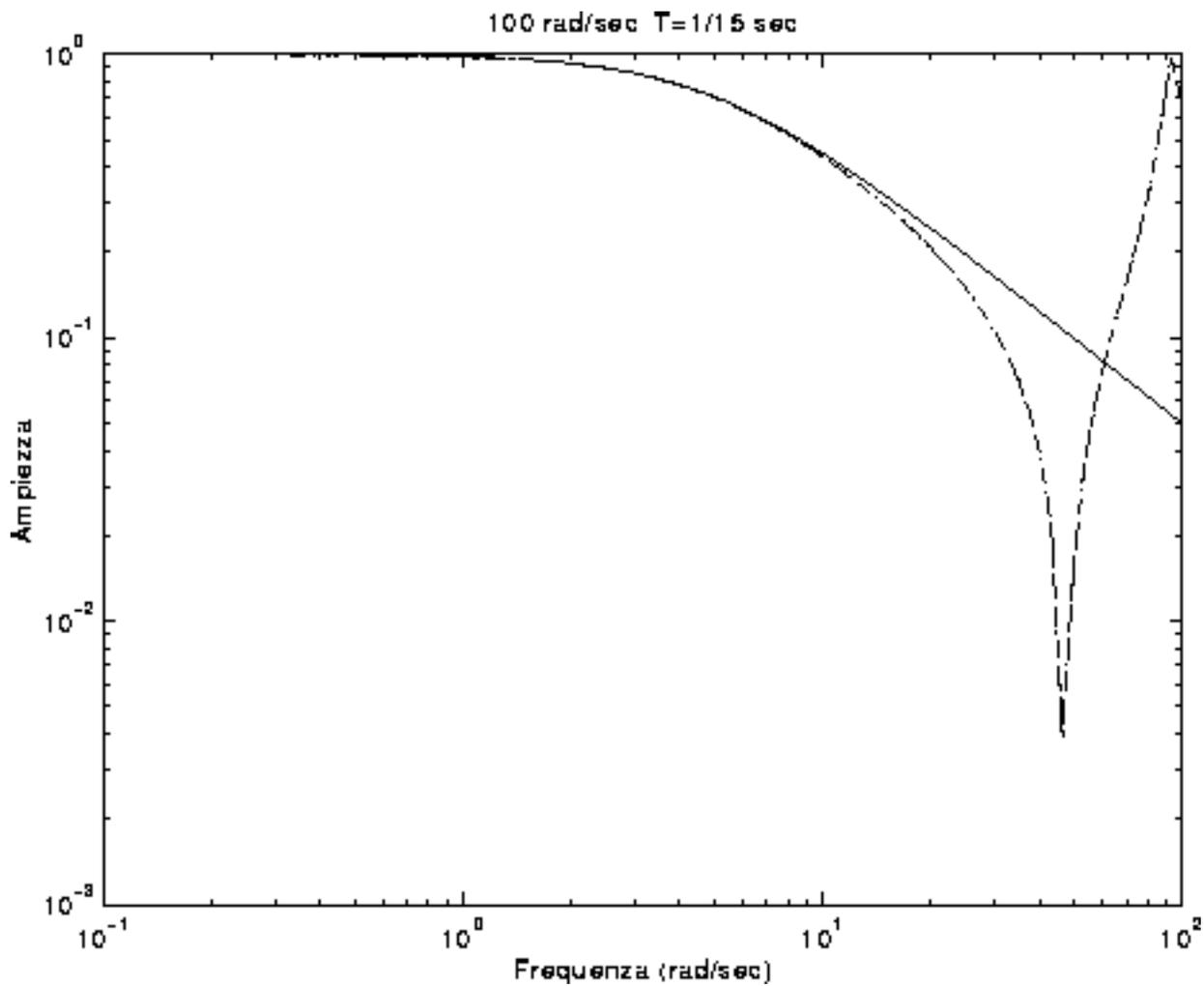


Figure 1.6: Effetto della discretizzazione con il metodo MZT e di Tustin con una pulsazione di campionamento pari a 100rad/sec.

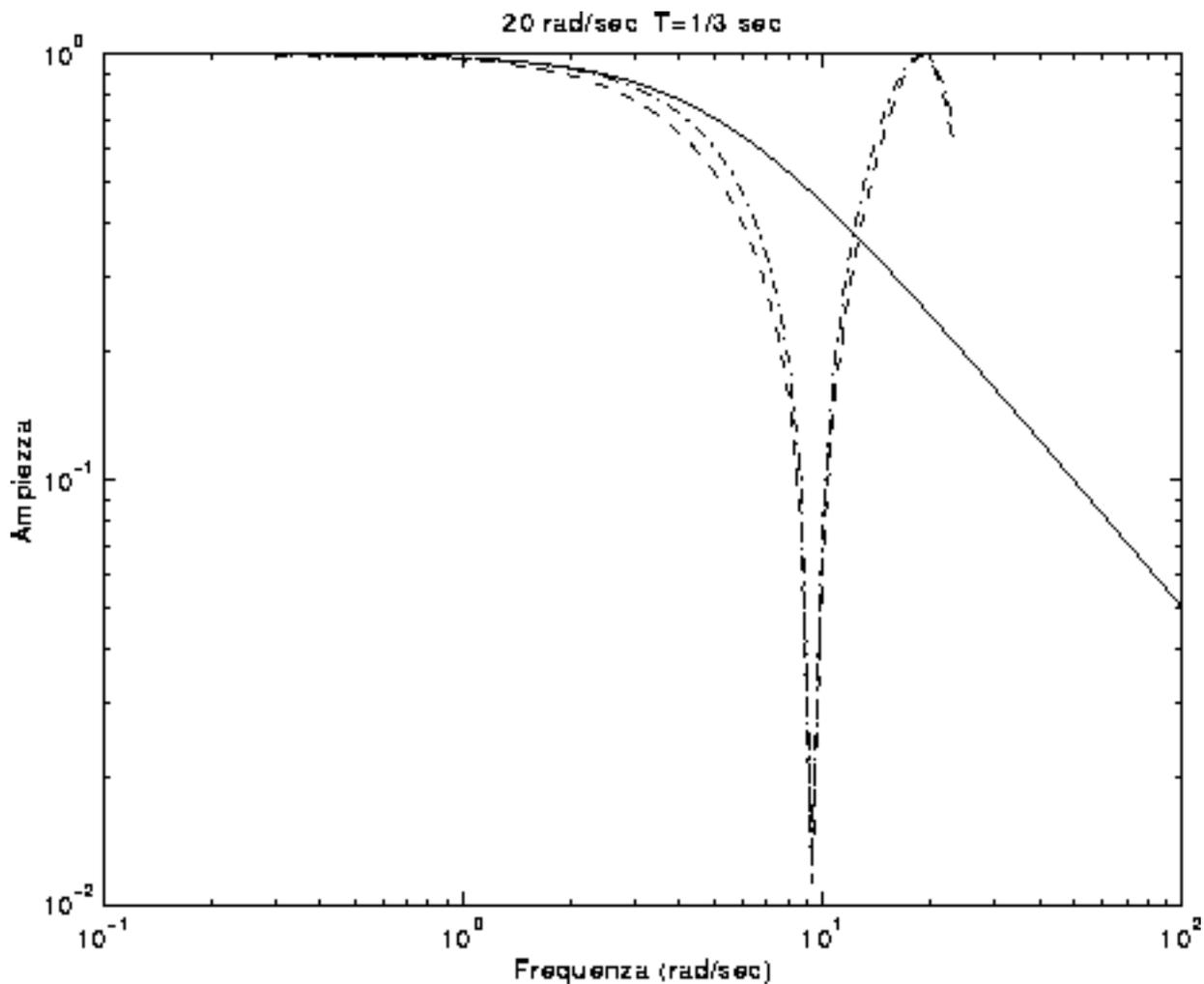


Figure 1.7: Effetto della discretizzazione con il metodo MZT e di Tustin con una pulsazione di campionamento pari a 20rad/sec.

Il file Matlab che genera questi plot e'

Matlab code - drag and drop:

```
% M-file: mzttc.m

clc
w=logspace(-1,2,100);
l=length(w);

% piano-s
num=5;
den=[1 5];
[magC,phaseC]=bode(num,den,w);
axis([-1 2 -2 0]);
figure(1)
loglog(w,magC,'-')
ylabel('Ampiezza')
xlabel('Frequenza (rad/sec)')
title('100 rad/sec T=1/15 sec')
```

```

hold on

%           T = 1/15 sec
T = 1/15;

% MZT
num=.143*[1 1];
den=[1 -.715];
[mag1,phase]=dbode(num,den,T,w);

% Tustins
num=.143*[1 1];
den=[1 -.713];
[mag2,phase]=dbode(num,den,T,w);

loglog(w,mag1,'--',w,mag2,'-.')
hold off

%           T = 1/3 sec
figure(2)
loglog(w,magC,'-')
ylabel('Ampiezza')
xlabel('Frequenza (rad/sec)')
title('20 rad/sec  T=1/3 sec')
hold on
T = 1/3;

% MZT
num=.405*[1 1];
den=[1 -.189];
wp=w;
wp=wp(wp < 24);
[mag1,phase]=dbode(num,den,T,wp);

% Tustins
num=.454*[1 1];
den=[1 -.0914];
[mag2,phase]=dbode(num,den,T,wp);
loglog(wp,mag1,'--',wp,mag2,'-.')
hold off

```

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Richiami sulle tecniche di](#) Up: [Tecniche di controllo per](#) Previous: [iM-Esempio: Confronto tra la](#)

Sintesi dei controllori discreti

Le specifiche per la sintesi del controllore possono riassumersi brevemente in specifiche sulla

- stabilità;
- errore a regime;
- comportamento dinamico del transitoio:
 - velocità di risposta;
 - massima sovraelevazione.

Per i sistemi tempo-discreto oltre alle specifiche sopra elencate è possibile richiedere che il sistema abbia risposta impulsiva finita.

-
- [Richiami sulle tecniche di sintesi per i sistemi tempo continuo](#)
 - [Controllo dei sistemi discreti](#)
 - [Metodo Analitico](#)
 - [Vincolo dovuto alla Causalità](#)
 - [Vincolo dovuto alla Stabilità](#)
 - [Risposta Impulsiva](#)
 - [Risposta Indiciale](#)
 - [Risposta alla Rampa](#)
 - [Metodo analitico: sintesi](#)
 - [Il metodo del luogo delle radici](#)
 - [Proprietà del luogo delle radici](#)
 - [iM-Esempio: sintesi del controllore \(dal tempo continuo al tempo discreto\)](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Controllo dei sistemi discreti](#) **Up:** [Sintesi dei controllori discreti](#) **Previous:** [Sintesi dei controllori discreti](#)

Richiami sulle tecniche di sintesi per i sistemi tempo continuo

In questo paragrafo si richiamano le tecniche di sintesi studiate per i sistemi tempo continuo. Si vedrà in seguito che molto spesso si preferisce progettare il controllore tempo continuo per il sistema processo e successivamente discretizzarlo con una delle tecniche viste in precedenza.

I controllori tempo continuo usati più frequentemente sono:

- Controllori standard P, PD, PID;
- Reti ritardatrici (phase lag);
- Reti anticipatrici (phase lead);
- Reti lead lag,

ed gli strumenti per il loro progetto sono:

- Diagrammi si Bode;
- Diagrammi di Nyquist;
- Luogo delle radici.

I controllori e le tecniche di sintesi sopra elencate sono specifiche per il dominio della frequenza. Una tecnica per la sintesi del controllore nel dominio del tempo con una retroazione dello stato è,

- la tecnica dell'assegnamento dei poli.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Metodo Analitico](#) **Up:** [Sintesi dei controllori discreti](#) **Previous:** [Richiami sulle tecniche di](#)

Controllo dei sistemi discreti

I metodi per la sintesi dei controllori discreti sono:

- Metodo analitico;
- Tecnica del luogo delle radici;
- Tecnica della trasformazione bilineare.

Con la tecnica della trasformazione bilineare, si possono utilizzare le tecniche di sintesi dei controllori tempo continuo.

Anche in tempo discreto si può utilizzare la tecnica dell'assegnamento dei poli per assegnare i poli del sistema a ciclo chiuso.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Vincolo dovuto alla Causalità](#) **Up:** [Sintesi dei controllori discreti](#) **Previous:** [Controllo dei sistemi discreti](#)

Metodo Analitico

Si consideri un processo tempo discreto $P(z)$ chiuso con una retroazione unitaria sul controllore $C(z)$. La f.d.t. del sistema a ciclo chiuso è:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{P(z)C(z)}{1 + P(z)C(z)}$$

Assegnato l'impianto P , il metodo analitico consiste nello scegliere il controllore $C(z)$ in modo tale che:

$$\frac{PC}{1 + PC} = M \Rightarrow C = \frac{1}{P} \frac{M}{1 - M}$$

dove $M(z)$ è la f.d.t. del sistema a ciclo chiuso desiderata.

Ovviamente non sarà possibile scegliere arbitrariamente la funzione da realizzare in anello chiuso $M(z)$. Il metodo analitico si preoccupa proprio di dare delle opportune specifiche sulla $M(z)$ in modo tale che il controllore $C(z)$ risulti essere fisicamente realizzabile.

La $M(z)$ non può essere qualsiasi ma deve essere tale da

1. rispettare il principio di causalità (essere fisicamente realizzabile);
2. garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso;
3. tenere conto delle specifiche sull'errore a regime.

-
- [Vincolo dovuto alla Causalità](#)
 - [Vincolo dovuto alla Stabilità](#)
 - [Risposta Impulsiva](#)
 - [Risposta Indiciale](#)
 - [Risposta alla Rampa](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Vincolo dovuto alla Stabilità](#) Up: [Metodo Analitico](#) Previous: [Metodo Analitico](#)

Vincolo dovuto alla Causalità

Affinchè il sistema sia fisicamente realizzabile, le uscite all'istante kT devono dipendere solo dagli ingressi attuali e precedenti e dalle uscite precedenti e non dagli ingressi e dalle uscite future.

Il controllore

$$C(z) = \frac{M(z)}{1 - M(z)}$$

è un rapporto di polinomi in z del tipo

$$C(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}.$$

Per rispettare il principio di causalità deve essere:

$$b_0 \neq 0.$$

Nel caso in cui l'impianto $P(z)$ presenti un ritardo:

$$P(z) = z^{-m} P_1(z),$$

dove P_1 non è ritardato, per rispettare il principio di causalità la f.d.t. a ciclo chiuso $M(z)$ deve essere

$$M(z) = z^{-m_1} M_1(z) \quad \text{con} \quad m_1 \geq m.$$

Il ritardo dell'impianto P non può essere eliminato.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Risposta Impulsiva](#) Up: [Metodo Analitico](#) Previous: [Vincolo dovuto alla Causalità](#)

Vincolo dovuto alla Stabilità

Se il processo ha degli zeri al di fuori del cerchio unitario, $(z_1^+, z_2^+, \dots, z_h^+)$ e/o non è stabile, cioè ha dei poli al di fuori del cerchio unitario $(p_1^+, p_2^+, \dots, p_f^+)$, la sua f.d.t. $P(z)$ risulta,

$$P(z) = \frac{(1 - z_1^+ z^{-1}) \dots (1 - z_h^+ z^{-1})}{(1 - p_1^+ z^{-1}) \dots (1 - p_f^+ z^{-1})} P_1(z).$$

In questo caso per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso si deve scegliere $M(z)$ tale che:

$$\begin{cases} M(z) = (1 - z_1^+ z^{-1}) \dots (1 - z_h^+ z^{-1}) M_1(z); \\ 1 - M(z) = (1 - p_1^+ z^{-1}) \dots (1 - p_f^+ z^{-1}) M_2(z), \end{cases}$$

quindi M_1 ed M_2 devono soddisfare la relazione

$$(1 - z_1^+ z^{-1}) \dots (1 - z_h^+ z^{-1}) M_1(z) + (1 - p_1^+ z^{-1}) \dots (1 - p_f^+ z^{-1}) M_2(z) = 1.$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Risposta Indiciale](#) **Up:** [Metodo Analitico](#) **Previous:** [Vincolo dovuto alla Stabilità](#)

Risposta Impulsiva

Se si vuole una risposta impulsiva finita, si devono scegliere M_1 ed M_2 non come rapporti di polinomi ma come semplici polinomi in z^{-1} .

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

[contents](#)

Next: [Risposta alla Rampa](#) **Up:** [Metodo Analitico](#) **Previous:** [Risposta Impulsiva](#)

Risposta Indiciale

Se si vuole un errore a regime nullo per un ingresso a gradino, si deve inserire (se non è già presente nel processo) un integratore nel controllore.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Metodo analitico: sintesi](#) **Up:** [Metodo Analitico](#) **Previous:** [Risposta Indiciale](#)

Risposta alla Rampa

Se si vuole un errore a regime nullo per un ingresso a rampa, si devono inserire (se non sono già presenti nel processo) due integratori nel controllore.

Quanto detto corrisponde ad inserire un nuovo vincolo su $1-M(z)$ infatti

$$C(z)P(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n}(\dots) = \frac{M(z)}{1-M(z)}$$

quindi

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^n (1 - p_1^+ z^{-1}) \dots (1 - p_f^+ z^{-1}) M_2(z)$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [Il metodo del luogo](#) Up: [Sintesi dei controllori discreti](#) Previous: [Risposta alla Rampa](#)

Metodo analitico: sintesi

In sintesi,

$$C(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)}$$

Il termine noto del denominatore di C deve essere diverso da zero

Se l'impianto ha un ritardo di m campioni, allora

$$M(z) = z^{-m} M_1(z) \quad \text{con} \quad m_1 \geq m,$$

Se l'impianto P ha zeri (z_i^+) e poli (p_i^+) al di fuori del cerchio unitario, allora

$$\begin{cases} M(z) = z^{-m} (1 - z_1^+ z^{-1}) \dots (1 - z_h^+ z^{-1}) M_1(z) \\ 1 - M(z) = (1 - p_1^+ z^{-1}) \dots (1 - p_f^+ z^{-1}) M_2(z) \end{cases}$$

Per ottenere un errore a regime nullo per un ingresso al gradino, rampa, ...,

$$\begin{cases} M(z) = z^{-m} (1 - z_1^+ z^{-1}) \dots (1 - z_h^+ z^{-1}) M_1(z) \\ 1 - M(z) = (1 - z^{-1})^n (1 - p_1^+ z^{-1}) \dots (1 - p_f^+ z^{-1}) M_2(z) \end{cases}$$

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [Proprietà del luogo delle](#) **Up:** [Sintesi dei controllori discreti](#) **Previous:** [Metodo analitico: sintesi](#)

Il metodo del luogo delle radici

Così come per i sistemi tempo continuo anche per quelli tempo discreto è possibile impiegare la tecnica del luogo delle radici per la sintesi di $C(z)$.

Il luogo delle radici descrive la posizione dei poli del sistema ad anello chiuso al variare del guadagno del sistema ad anello aperto.

-
- [Proprietà del luogo delle radici](#)
-

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

[contents](#)

Next: [iM-Esempio: sintesi del controllore](#) **Up:** [Il metodo del luogo](#) **Previous:** [Il metodo del luogo](#)

Proprietà del luogo delle radici

1. ha tanti rami quanti sono i poli delle funzione di trasferimento ad anello aperto che si intersecano in corrispondenza delle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo della f.d.t. ad anello aperto e termina su uno zero di essa o all'infinito;
2. è simmetrico rispetto all'asse reale;
3. se la costante di guadagno K è positiva, un punto sull'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla destra un numero totale dispari di zeri e poli.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)[up](#)[previous](#)[contents](#)

Next: [iM Sintesi del controllore](#): Up: [Sintesi dei controllori discreti](#) Previous: [Proprietà del luogo delle](#)

iM-Esempio: sintesi del controllore (dal tempo continuo al tempo discreto)

Sia dato un doppio integratore

$$G(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Si vuole sintetizzare un controllore digitale $D(z)$ tale che la frequenza naturale ω_n e lo smorzamento ξ siano rispettivamente pari a 0.3rad/sec e 0.7.

Come primo passo si progetta *per tentativi* nel dominio delle frequenze un controllore tempo continuo. Per verificare che la rete anticipatrice

$$D(s) = 0.81 \frac{s + 0.2}{s + 20}$$

è tale che il sistema in anello chiuso soddisfi le specifiche richieste, si tracci il luogo delle radici di

$$K \frac{1}{s^2} \frac{s + 0.2}{s + 20},$$

e si controlli in quale punto cadono i poli del sistema in anello chiuso quando la costante di proporzionalità è $K=0.81$. Il codice matlab che genera il luogo delle radici di questo sistema è:

Matlab code - drag and drop:

```
% M-file: rlocus1.m
clg
numG=1;
denG=[1 0 0];

numD=[1 .2];
denD=[1 2];

num=conv(numG,numD);
den=conv(denG,denD);
poles=roots(den);
zeros=roots(num);

K1=0:.05:1.22;
```

```
K2=[1.25 1.28]; % K for break-in and break-away points
K3=1.5:5:100;
K=[K1 K2 K3];
Ko=.81;

r=rlocus(num,den,K);
ro=rlocus(num,den,Ko);

axis('square')
axis([-2.5 .5 -1.5 1.5])
plot(r,'-'),grid
hold on
plot(ro,'*')
plot(-.2,0,'o')
plot(-2,0,'x')
plot(0,.01,'x')
plot(0,-.01,'x')
title('Piano s --- locus vs. K')
xlabel('Re(s)')
ylabel('Im(s)')

hold off
axis('normal')
```

Il risultato di questo *matlab script* è riportato in Fig. [1.8](#).

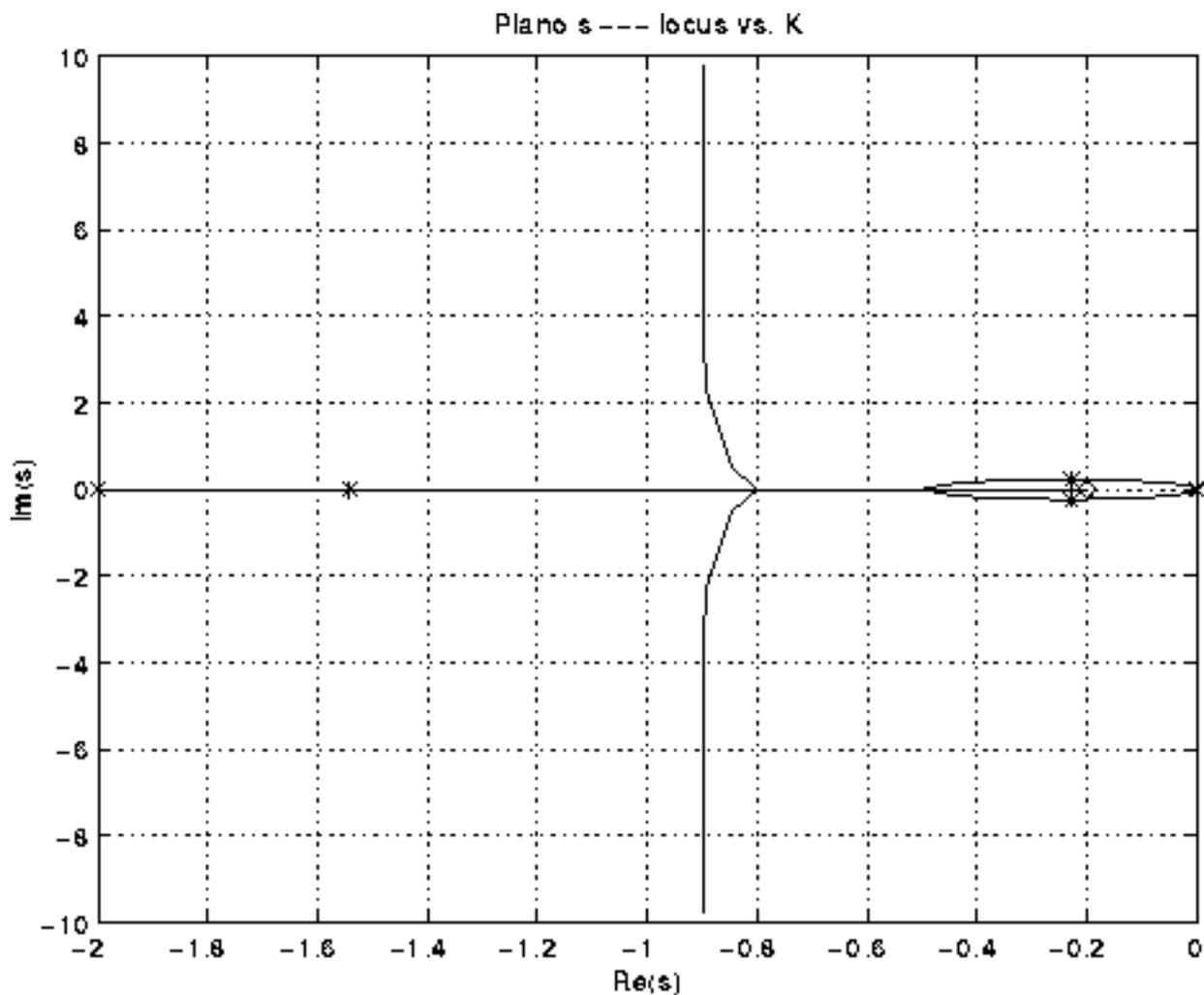


Figure 1.8: Luogo delle radici per $D(s)G(s)$.

Al fine di discretizzare il controllore $D(s)$ dobbiamo per prima cosa scegliere la frequenza di campionamento. Il sistema in anello chiuso ha una pulsazione naturale che è pari 0.3rad/sec e quindi la sua banda passante sarà di circa 0.3rad/sec . Cautelativamente scegliamo una pulsazione di campionamento venti volte più alta

$$\omega_s = 20 \times 0.3 = 6\text{rad/sec.}$$

Con un tempo di campionamento di circa 1sec la tecnica di discretizzazione *matched Z transform* fornisce il seguente controllore digitale

$$D(z) = \frac{0.389 - 0.319z^{-1}}{1 - 0.135z^{-1}}$$

In Fig. [1.9](#) sono rappresentati entrambe le risposte al gradino dell'anello chiuso nella versione tempo continuo e tempo discreto. Il codice Matlab che lo genera è:

Matlab code - drag and drop:

```
% M-file: ver1.m
numGs=1;
denGs=[1 0 0]; % s^2
```

```
numDs=.81*[1 .2];
denDs=[1 2];

numC=conv(numGs,numDs);
denC=conv(denGs,denDs);

[numCL,denCL]=feedback(numC,denC,1,1);

tf=30;
t=0:.2:tf;
y=step(numCL,denCL,t);

axis([0 30 0 1.5])
plot(t,y),grid
hold on

T=1;
[numGz,denGz]=c2dm(numGs,denGs,T,'zoh');

numDz2=.389*[1 -.82];
denDz2=[1 -.135];

numz2=conv(numGz,numDz2);
denz2=conv(denGz,denDz2);

[numCLz2,denCLz2]=feedback(numz2,denz2,1,1);
N=tf/T+1;
td=0:1:tf;
yd2=dstep(numCLz2,denCLz2,N);
plot(td,yd2,'-',td,yd2,'*')
title('Risposte al gradino')
xlabel('Tempo (sec)')
ylabel('Uscita del sistema')
hold off
```

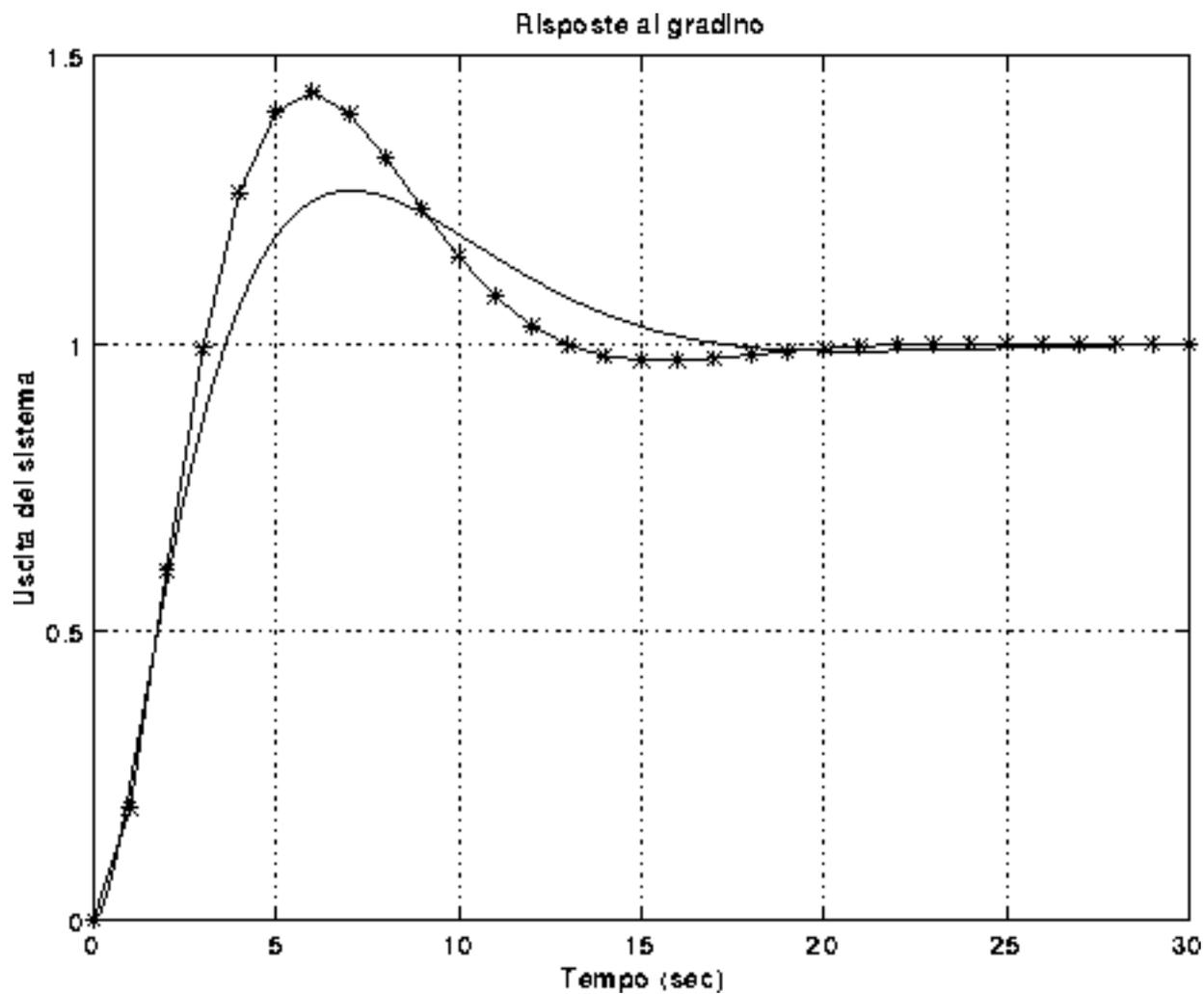


Figure 1.9: Risposte al gradino dell'anello chiuso nella versione tempo continuo e tempo discreto.

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Next: [About this document](#) Up: [Tecniche di controllo per](#) Previous: [iM-Esempio: sintesi del controllore](#)

iM Sintesi del controllore: un esempio completo

Scaricando questo file matlab è possibile mandare in esecuzione un esercizio completo sulla sintesi del controllore digitale.

Eseguendo digdem.m in ambiente Matlab si apre un menu a finestra. A questo punto è possibile scegliere tra 4 opzioni:

- dal continuo al discreto;
- sintesi del controllore dal tempo continuo;
- controllori standard PID con Zieger-Nichols;
- esempio completo controllo di velocità per un Hard-Disk.

Il programma fornisce anche delle spiegazioni sintetiche sul tipo di operazioni che esegue.

Per quanto riguarda il controllo della velocità dell'hard disk. Il codice esegue i seguenti passi:

1. calcola la funzione di trasferimento tra la corrente di controllo e la velocità del disco;
2. sceglie il periodo di campionamento e discretizza il sistema con uno ZOH;
3. calcola gli autovalori in tempo discreto ad anello aperto;
4. cerca di dintetizzare un controllo in anello chiuso di tipo proporzionale;
5. verifica con il lugo delle radici che il sistema in anello chiuso diventa instabile;
6. progetta una rete anticipatrice tempo-discreta e ne verifica le caratteristiche con il luogo delle radici;
7. esegue un'analisi della robustezza del sistema con il calcolo del margine di fase e di ampiezza.

Matlab code - drag and drop:

```
echo off
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      DEMO su Controllo Digitale
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
risp=menu('Quale argomento ?','C 2 D','Disegno dal Continuo','Metodo Analitico','PID
with Z-N','Progetto Hard--Disk')

if risp==1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      Dal continuo al discreto C --> D
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t=0:.01:3; k=1:30; dt=0:(3/30):3;
y=sin(t).*exp(-t);
dy=sin(dt).*exp(-dt);
plot(t,y,dt,dy,'*')
disp('          %%%%%%%%%')
disp('          Conversioni Tempo Continuo--Tempo Discreto')
disp('          %%%%%%%%%')

disp(' ')
disp('  La conversione di un SEGNALE Tempo Continuo in un segnale Tempo')
disp('  Discreto su intervalli di tempo T e'' senz''altro unica e facilmente ')
disp('  realizzabile con la tecnica del CAMPIONAMENTO:')
disp('  nel grafico e'' mostrata una funzione del tempo, ')
disp('  y(t) = sin(t)*exp(-t),  0 < t < 3 sec ')
disp('  ed il corrispondente segnale campionato ogni T = .1 sec ')
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
disp(' E'' possibile trovare la relazione tra la L-trasformata di y')
```

```

disp(' e la Z-trasformata di dy. Per esempio, il gradino')
disp(' 1/s ---campionamento---> Sum[exp(-skT)] ---def---> z/(z-1  ')
disp(' [Sum e'' la Sommatoria per k=0,inf ]')
disp(' [z e'' def. = exp(sT)]')
disp(' Il passaggio sequenze numeriche <---> polinomi in z e'' chiarissimo')
disp(' Quindi da una equazione alle differenze si passa automaticamente ad')
disp(' una FdT in z')
disp(' ')
disp(' La conversione di un SISTEMA TC in TD e'' invece impossibile in modo')
disp(' esatto. SISTEMA e'' una relazione dinamica, rappresentata da una equazione')
disp(' differenziale o alle differenze, tra lo spazio dei segnali di ingresso e')
disp(' quello dei segnali di uscita. Se si realizza un sistema TD la cui')
disp(' uscita, in risposta ad un particolare ingresso campionato,')
disp(' corrisponde esattamente alla uscita (campionata) del sistema continuo,')
disp(' questo non avverra'' per nessun altra coppia ingresso-uscita.')
disp(' ')
disp(' Esempio: G(s) = 10/(s + 5), risposta impulsiva: y=10*exp(-5t);')
disp(' Il campionamento di questa risposta ha z-trasformata 10z/(z-exp(-5T))')
yc=impulse(10,[1 5],dt);
yd=dimpulse([10 0],[1 -exp(-5*0.1)],length(dt)) ;
stairs(dt,yd');hold on;plot(dt,yc'); hold off;
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      Step response
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
yc=step(10,[1 5],dt);
yd=dstep([10 0],[1 -exp(-5*0.1)],length(dt)) ;
stairs(dt,yd');hold on;plot(dt,yc'); hold off;
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
disp(' Esempio: G(s) = 10/(s + 5), risposta gradino: y=2-2*exp(-5t);')
disp(' Il campionamento di questa risposta ha z-trasformata ')
disp(' 2*z/(z-1) - 2*z/(z-exp(-5T))')
disp(' Devo trovare G(z): G(z)*z/(z-1) eguagli quella risposta')
disp(' Risulta G(z) = 2(1-exp(-5T))/(z-exp(-5T))')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      step
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
yc=step(10,[1 5],dt);
yd=dstep([2*(1-exp(-5*0.1))],[1 -exp(-5*0.1)],length(dt)) ;
stairs(dt,yd');hold on;plot(dt,yc'); hold off;
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      impulse
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
yc=impulse(10,[1 5],dt);
yd=dimpulse([2*(1-exp(-5*0.1))],[1 -exp(-5*0.1)],length(dt)) ;
stairs(dt,yd');hold on;plot(dt,yc'); hold off;
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
elseif risp==2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%           Dal Continuo
%%%%%%%%%%

disp('           %%%%%%%%%% ')
disp(' Trasposizione di un controllore TC in TD')
disp('           %%%%%%%%%% ')
disp(' E'' data la f.d.t di un motore elettrico')
num=[1]; den=[1 1 0];
printsys(num,den);
disp(' per il quale, in base a specifiche sul margine di fase e sulla ')
disp(' velocita'' di risposta, e'' stato disegnato il compensatore')
nc=[4 4]; dc=[1 2];
printsys(nc,dc);
disp(' Trovare l''equivalente C(z) scegliendo Ts con la regola pratica')
disp(' Ts = 0.3 / Wco')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Wco e'' la pulsazione di crossover per il sistema compensato in anello
aperto')
disp(' Cominciamo dai diagrammi di Bode per l''impianto ed il compensatore')
bode(num,den);
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
bode(nc,dc);
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
disp(' Il compensatore e'' un lead con massimo anticipo in')
disp(' Wm = sqrt(1*2) , dove vale Phim = arcsin(((4+2)/2 - 2)/((4+2)/2)) = 20 deg')
disp(' Diagramma compensato: ')
[ncg,dcg]=series(nc,dc,num,den);
bode(ncg,dcg)
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')
disp(' Il taglio e'' circa in Wco = 2 rad/sec => Ts = 0.15')
ts = 0.15;
disp(' Applichiamo la regola di Tustin sostituendo')
disp(' s con a (z-1)/(z+1) ')
disp(' cercando di non distorcere alla pulsazione Wm, per la quale il')
disp(' compensatore e'' stato progettato')
Wm=sqrt(2);
a=Wm/tan(Wm*ts/2),
disp(' da cui si ottiene')
ncz=3.74*[1 - 0.86]
dcz=[1 -0.74]
disp(' Confrontiamo le risposte in frequenza dei compensatori')
w = logspace(0,30);
[mag,phase] = bode(nc,dc,w);
[mtus,ptus,wtus] = dbode(ncz,dcz,ts);
% Now plot the results as a comparison.  Press any key after the plot ...
subplot(211)
semilogx(w,20*log10(mag),wtus,20*log10(mtus))
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Gain db')
title('c2d comparison plot')
subplot(212)
semilogx(w,phase,wtus,ptus)

```

```

xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Phase deg')
pause % Press any key to continue ...
disp('Ora confrontiamo i risultati finali, ad esempio in termini di')
disp(' risposte al gradino degli anelli chiusi')
[ncgl,dcgl]=cloop(ncg,dcg);
yc = step(ncgl,dcgl,(1:50)*ts);
[nz,dz]=c2dm(num,den,ts); %ZOH equiv.
[ncgz,dcgz]=series(ncz,dcz,nz,dz);
[ncglz,dcglz]=cloop(ncgz,dcgz);
yd=dstep(ncglz,dcglz,50);
stairs(1:50,yd');hold on;plot(1:50,yc'); hold off;
disp('Any key to continue....')
pause
disp(' ')

elseif risp==3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Metodo analitico
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('Questa opzione non `e per il momento disponibile !!! ')

elseif risp==4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PID con ZN
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp(' G(s) = 10/(s(s+2)) ');
ts=0.25; ng=10; dg=[1 2 0];
[ng_z,dg_z]=c2dm(ng,dg,ts) %% Usa ZOH
axis('square'),zgrid('new'), rlocus(ng_z, dg_z)
[km,pole]=rlocfind(ng_z,dg_z) %% trova il guadagno di oscillazione
wm=angle(pole(1))/ts
kp=0.6*km % parametri di Zieger--Nichols
kd=kp*pi/(4*wm)
ki=kp*wm/pi
nc_z = [kp*ts+kd+ki*ts*ts, -kp*ts-2*kd, kd];
dc_z=[ts -ts 0]
[ncg,dcg] = series(nc_z,dc_z,ng_z,dg_z)
[ncl,dcl] = cloop(ncg,dcg,-1)
ddamp(dcl,ts)
hold off
axis('square'),zgrid('new'), rlocus(ncg,dcg)
[km,pole]=rlocfind(ncg,dcg) %% trova il guadagno di oscillazione

elseif risp==5
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% diskdemo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
diskdemo
end

```

Il file diskdemo.m che è richiamato da digdemo.m è qui di seguito riportato.

Matlab code - drag and drop:

```

%DISKDEMO.M Demonstration design of harddisk digital controller.
echo on

% This file demonstrates MATLAB's ability for classical digital control
% system design by going through the design of a computer HARDDISK

```

```

% read/write head position controller.
echo on

pause % Press any key to continue ...
% Using Newton's law, the simplest model for the read/write head has the
% following differential equation:
%
%  $I \cdot \theta_{ddot} + C \cdot \theta_{dot} + K \cdot \theta = K_i \cdot i$ 
%
% where I is the inertia of the head assembly
%       C is the viscous damping coefficient of the bearings
%       K is the return spring constant
%        $K_i$  is the motor torque constant
%        $\theta_{ddot}$ ,  $\theta_{dot}$ , and  $\theta$  are the angular acceleration,
%       angular velocity and position of the head
%       i is the input current
%

pause % Press any key to continue ...

% Taking the laplace transform, the transfer function is:
%
% 
$$H(s) = \frac{K_i}{I s^2 + C s + K}$$

%
% Using the values  $I=.01 \text{ Kg m}^2$ ,  $C=.004 \text{ Nm/(rad/sed)}$ ,  $K=10 \text{ Nm/rad}$ , and
%  $K_i=.05 \text{ Nm/rad}$  form the transfer function description of this system

I = .01; C = 0.004; K = 10; Ki = .05;
NUM = [Ki];
DEN = [I C K];
printsys(NUM,DEN,'s');

pause % Press any key to continue ...

% Our task is to design a digital controller that can be used to provide
% accurate positioning of the read/write head. We will do the design in the
% digital domain.

% First we must discretize our plant since it is continuous. Since our
% plant will have a digital-to-analog-converter (with a zero-order hold)
% connected to its input, use the 'zoh' discretization method
% of the function C2DM. Use sample time  $T_s = 0.005$  (5 ms)

Ts = 0.005;
w = logspace(0,3);
[mag,phase] = bode(NUM,DEN,w);
[num,den] = c2dm(NUM,DEN,Ts,'zoh');
[mzoh,pzoh,wzoh] = dbode(num,den,Ts);

% Now plot the results as a comparison. Press any key after the plot ...
echo off
subplot(211)
semilogx(w,20*log10(mag),wzoh,20*log10(mzoh))
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Gain db')
title('c2d comparison plot')

subplot(212)

```

```

semilogx(w,phase,wzoh,pzoh)
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Phase deg')
pause % Press any key to continue ...
echo on

pause % Press any key to continue ...

% Now analyze the discrete system.
disp('Discrete system')
printsys(num,den,'z')

% Plot step response
subplot(111)
dstep(num,den); pause % Press any key after the plot ...

% The system oscillates quite a bit. This is probably due to very light
% damping. We can check this by computing the open loop eigenvalues.

disp('Open loop discrete eigenvalues'), ddamp(den,Ts);
zgrid('new'), pzmap(1,den); pause % Press any key after the plot ...

% Note that the poles are very lightly damped and near the unit circle.
% We need to design a compensator that increases the damping of this system.

% Let's try to design a compensator. The simplest compensator is a simple gain.
rlocus(num,den); hold off; pause % Press any key after the plot ...

% As shown in the root locus, the poles quickly leave the unit circle and go
% unstable. We need to introduce some lead or a compensator with some zeros.
% Try the compensator:      K(z + a)
%                          D(z) = ----- where a < b
%                          (z + b)

pause % Press any key to continue ...

% Form compensator and connect in series with our plant
% Use a = -.85 and b = 0.
[numc,denc] = zp2tf([.85 ],[0]',1);
[num2,den2] = series(numc,denc,num,den);

% Lets see how the frequency response has changed.
[mag,phase,w] = dbode(num,den,1); % Use normalized frequency
[mag2,phase2] = dbode(num2,den2,1,w);

% Now plot a comparison plot. Press any key after the plot ...
echo off
subplot(211), semilogx(w,20*log10(mag),w,20*log10(mag2))
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Gain dB')
subplot(212), semilogx(w,phase,w,phase2)
xlabel('Frequency (rad/sec)'), ylabel('Phase deg')
% Plot -180 degree line
hold on; semilogx([min(w(:)),max(w(:))],[-180,-180],'w--'); hold off;
pause % Press any key to continue ...
echo on

% So our compensator has indeed added lead.

% Now let's try the root locus again with our compensator

```

```

subplot(111)
zgrid('new'), rlocus(num2,den2); hold off; pause % Press any key after plot ...

% This time the poles stay within the unit circle for some time.
% Now its your turn, Using RLOCIND chose the poles with greatest damping
% ratio. (The lines drawn by ZGRID show the damping ratios from z=0 to 1
% in steps of .1)

pause % Press any key and then choose a point on the plot
[k,poles] = rlocfind(num2,den2);

disp(['You chose gain: ',num2str(k)], ddamp(poles,Ts));

% Let's form the closed loop system so that we can analyze the design.
[numc,denc] = feedback(num2,den2,k,1);

% These eigenvalues should match the ones you chose.
disp('Closed loop eigenvalues'), ddamp(denc,Ts);

pause % Press any key to continue ...

% Closed loop time response
dstep(numc,denc); pause % Press any key after the plot ...

% So the response looks pretty good and settles in about 14 samples
% which is 14*Ts secs.

disp(['Our disc drive will have a seek time > ',num2str(14*Ts),' seconds.'])

pause % Press any key to continue ...

% Let's now look at the robustness of our design. The most common classical
% robustness criteria is the gain and phase margin. The criteria is determined
% by forming a unity feedback system, calculating the Bode response and looking
% for the phase and gain crossovers. MATLAB contains a function MARGIN that
% determines the phase and gain margin given the Bode response.

% Form unity feedback system by connecting our design system with the gain
% we chose. Leave the loop open so we can compute the open loop Bode response.
[num2,den2] = series(num2,den2,k,1);

% Compute Bode response and margins
[mag,phase,w] = dbode(num2,den2,Ts);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(mag,phase,w);

% Plot Bode plot with margins
margin(mag,phase,w); pause % Press any key after the plot ...

% Gain margin db, @ frequency, Phase margin, @ frequency
Margins = [20*log10(Gm),Wcg,Pm,Wcp]

% Our design is robust and can tolerate a 10 db gain increase and a 40 degree
% phase lag without going unstable. By continuing this design process we may
% be able to find a compensator that will stabilize the open loop system and
% allow us to reduce the seek time (more damping would allow us to reduce the
% settling time in the step response).
echo off

```

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

[next](#)

[up](#)

[previous](#)

[contents](#)

Up: [No Title](#) Previous: [iM Sintesi del controllore:](#)

About this document ...

This document was generated using the [LaTeX2HTML](#) translator Version 96.1 (Feb 5, 1996) Copyright © 1993, 1994, 1995, 1996, [Nikos Drakos](#), Computer Based Learning Unit, University of Leeds.

The command line arguments were:

`latex2html -debug -font_size 14pt ctrldig.`

The translation was initiated by Domenico Prattichizzo on Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997

Domenico Prattichizzo

Wed Jun 25 08:08:49 MET DST 1997