

- Diagrammi di Bode & Nyquist -

(Praticò Andrea)

7 giugno 2002

Indice

0.1	2
0.2	3
0.3	5
0.4	8

Diagrammi di Bode & Nyquist

0.1

Data la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{20 \cdot s \cdot (s - 1)}{(s + 1)^2 (s^2 + 14s + 100)}$$

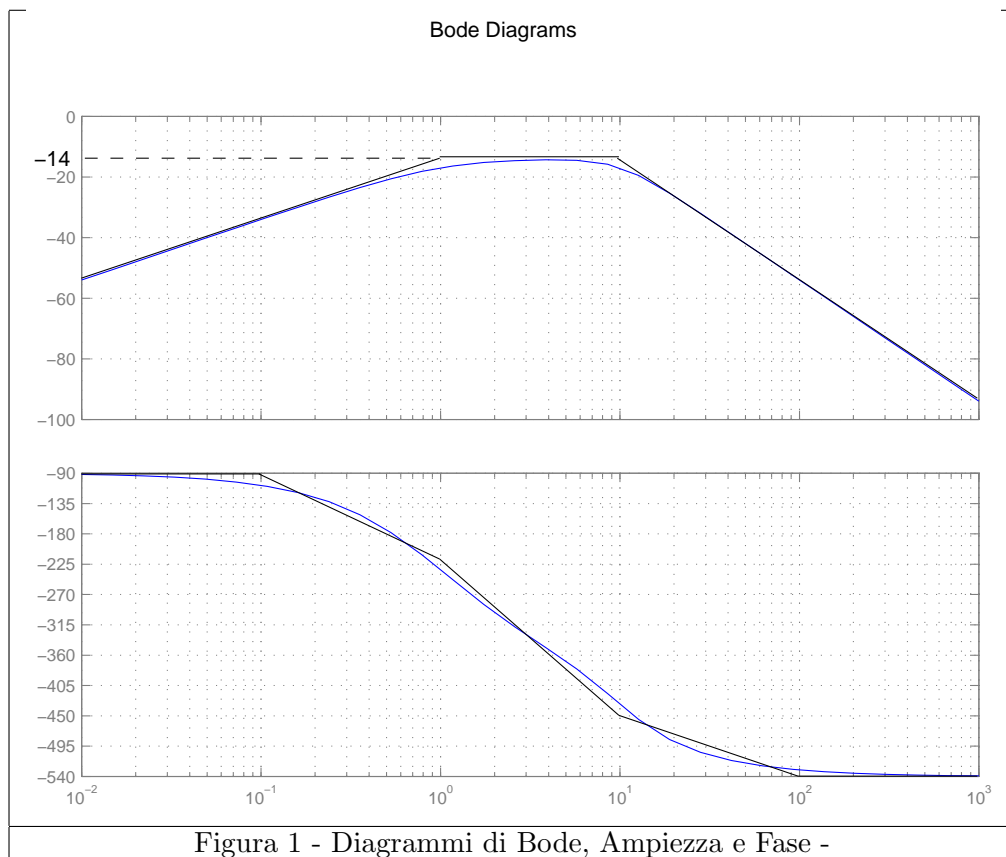
si pone in forma di Bode:

$$G(s) = -0.2 \frac{s(1 - s)}{(1 + s)^2 (1 + \frac{14}{100}s + \frac{s^2}{100})}$$

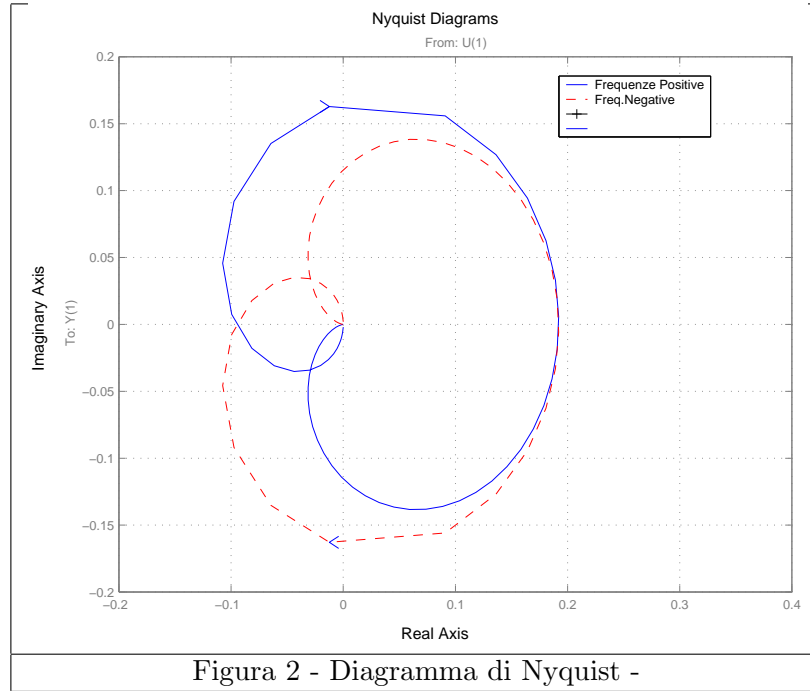
dalla quale si può notare il guadagno di Bode: $K_B = -0.2$, la frequenza di taglio dei poli complessi coniugati $\omega_n = 10$ (rad/s), ed il fattore di smorzamento: $\xi = 0.7$.

Si noti che il sistema descritto dalla suddetta F.d.T. è asintoticamente stabile, ma non a Fase Minima (per la presenza dello zero a parte reale strettamente positiva, oltre che al guadagno di Bode negativo).

I diagrammi di Bode (Ampiezza e Fase) sono i seguenti:



Con l'ausilio dei diagrammi di Bode si traccia il diagramma di Nyquist:



Per il criterio di Nyquist, si deduce che il sistema chiuso in reazione unitaria è asintoticamente stabile, in quanto non vi sono circondamenti del punto critico $(-1, 0)$.

0.2

Data la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10^9 \cdot s^2 \cdot (s - 10)}{(s + 100)(s + 1000)(s^2 + 110s + 10^5)}$$

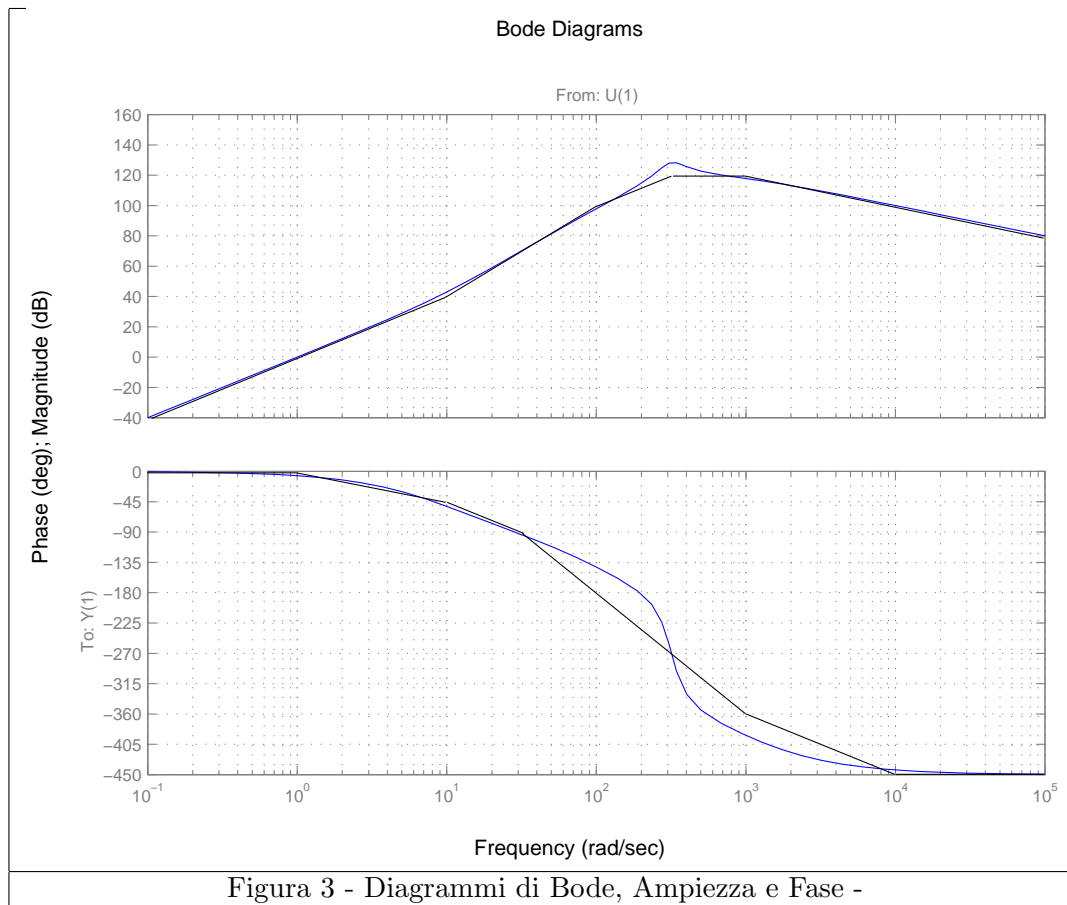
si pone in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{-s^2 \cdot (1 - \frac{s}{10})}{(1 + \frac{s}{100})(1 + \frac{s}{10^3})(1 + \frac{110}{10^5}s + \frac{s^2}{10^5})}$$

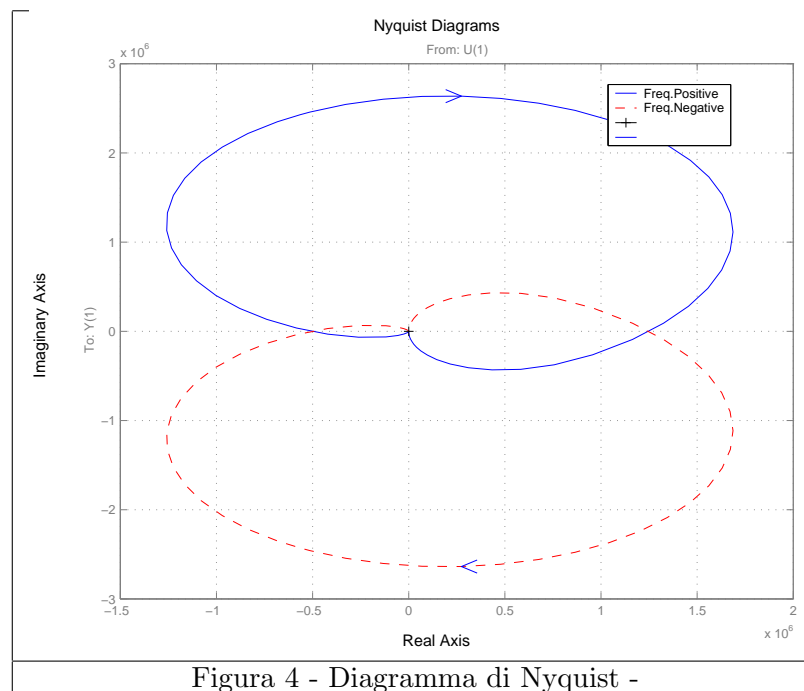
dalla quale si può notare il guadagno di Bode: $K_B = -1$, la frequenza di taglio dei poli complessi coniugati $\omega_n = \sqrt{10^5} = 316.228$ (rad/s), ed il fattore di smorzamento: $\xi = \frac{55}{\sqrt{10^5}} = 0.1739$.

Si noti che il sistema descritto dalla suddetta F.d.T. è asintoticamente stabile, ma non a Fase Minima (per la presenza dello zero a parte reale strettamente positiva, oltre che al guadagno di Bode negativo).

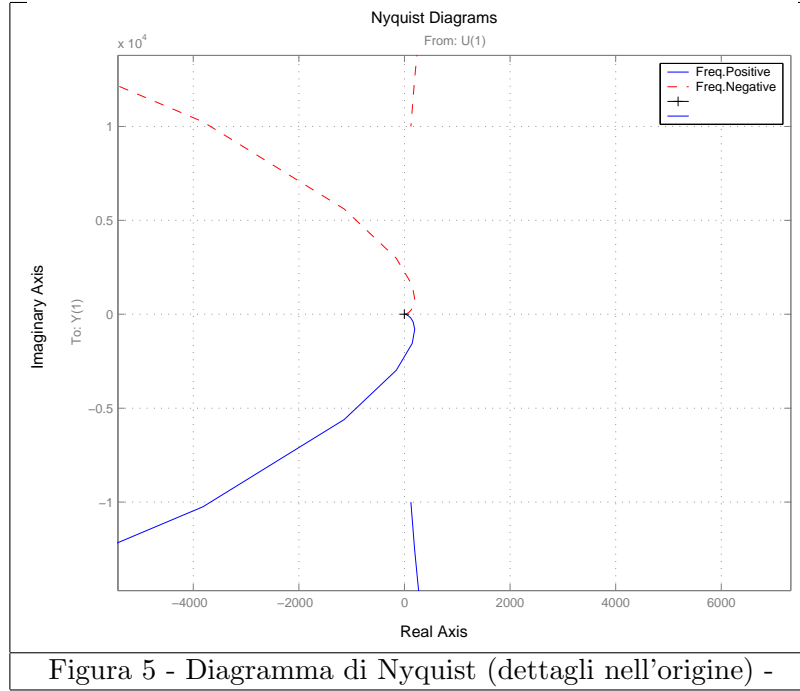
I diagrammi di Bode (Ampiezza e Fase) sono i seguenti:



Con l'ausilio dei diagrammi di Bode si traccia il diagramma di Nyquist:



E' conveniente incrementare il dettaglio in un intorno dell'origine:



Per il criterio di Nyquist, si deduce che il sistema chiuso in reazione unitaria è asintoticamente stabile, in quanto non vi sono circondamenti del punto critico $(-1, 0)$.

0.3

Data la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s \cdot (s + 10)(s - 100)}{(s^2 + 110s + 10^4)(s^2 + 100)}$$

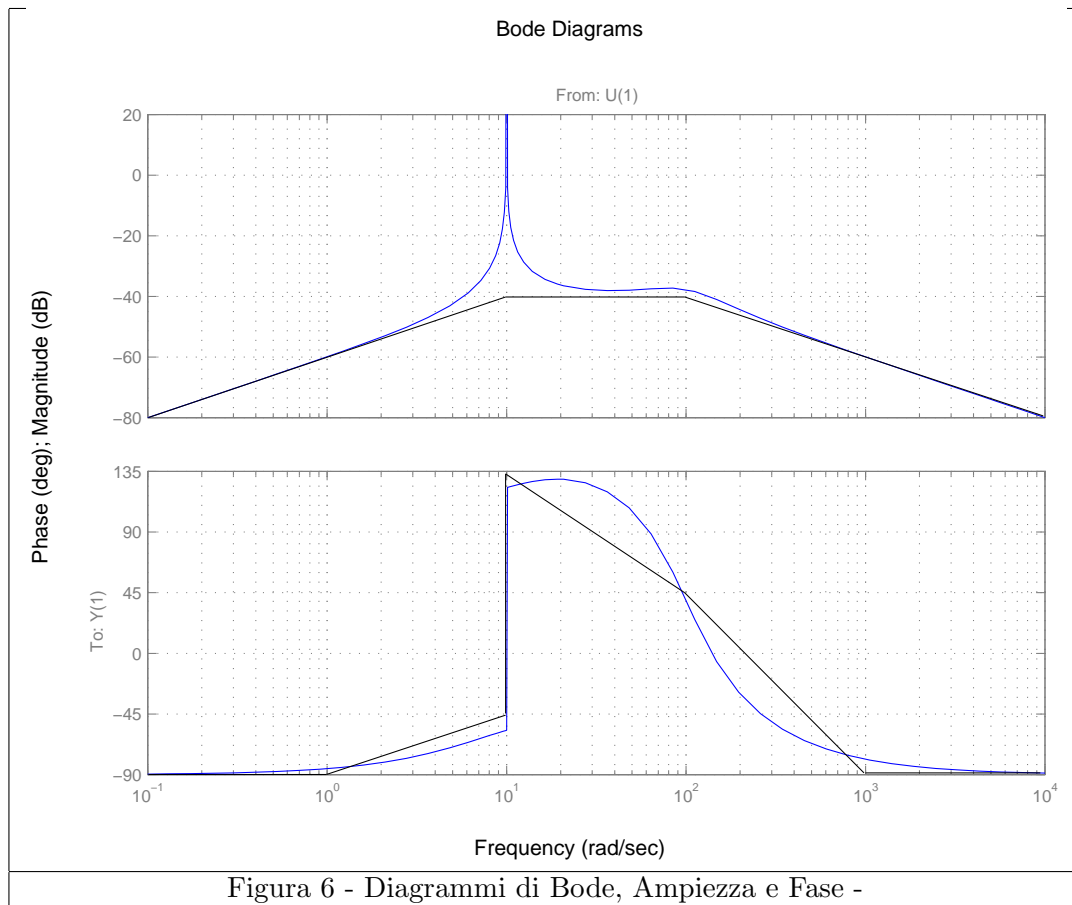
si pone in forma di Bode:

$$G(s) = -10^{-3} \frac{s \cdot (1 - \frac{s}{100})(1 + \frac{s}{10})}{(1 + \frac{s^2}{100})(1 + \frac{110}{10^4}s + \frac{s^2}{10^4})}$$

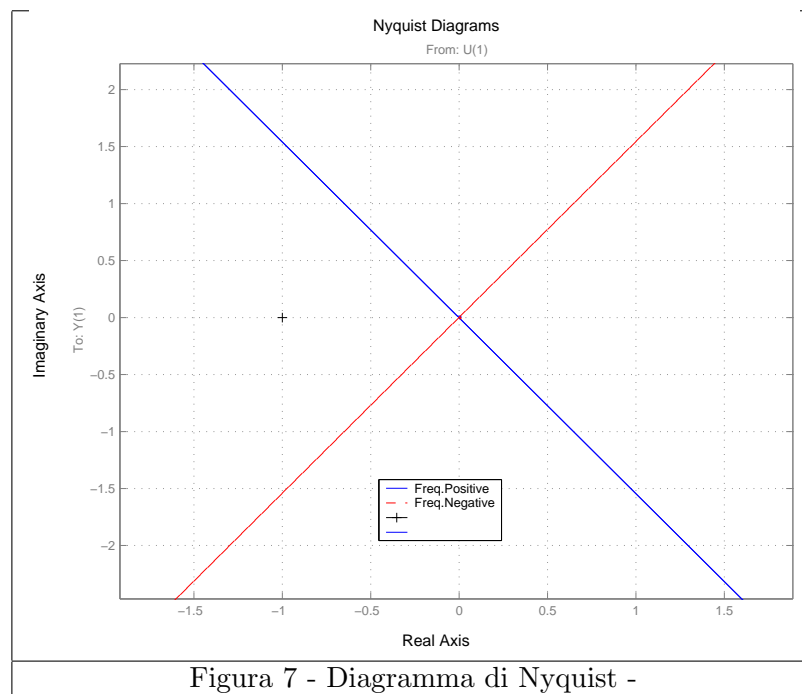
dalla quale si può notare il guadagno di Bode: $K_B = -10^{-3}$, le frequenze di taglio dei poli complessi coniugati $\omega_{n1} = 100$ (rad/s) $\omega_{n2} = 10$ (rad/s), ed i fattori di smorzamento: $\xi_1 = 0.55$ $\xi_2 = 0$.

Si noti che il sistema descritto dalla suddetta F.d.T. è asintoticamente stabile, ma non a Fase Minima (per la presenza dello zero a parte reale strettamente positiva, oltre che al guadagno di Bode negativo).

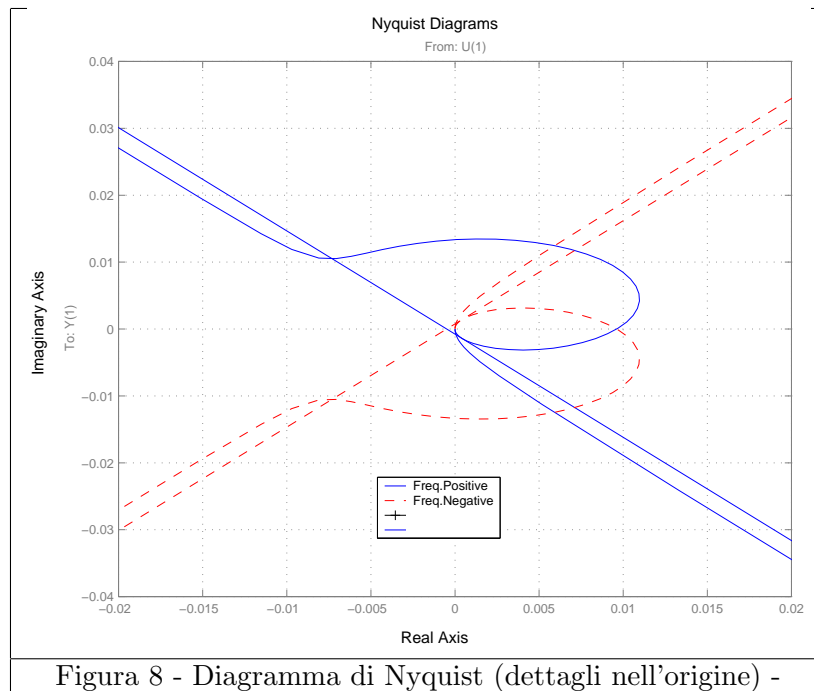
I diagrammi di Bode (Ampiezza e Fase) sono i seguenti:



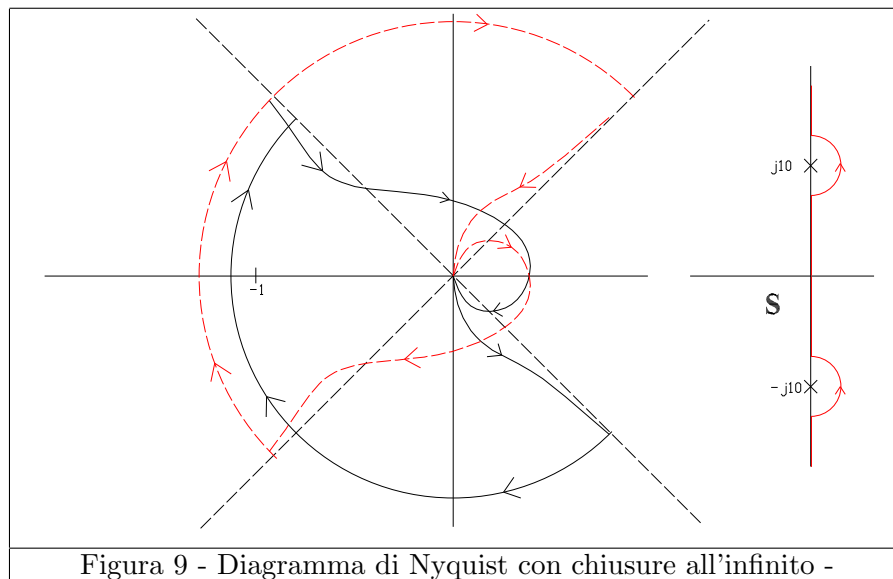
Con l'ausilio dei diagrammi di Bode si traccia il diagramma di Nyquist:



E' conveniente incrementare il dettaglio in un intorno dell'origine:



Il diagramma di Nyquist non è chiuso, quindi si procede con la chiusura all'infinito del diagramma.



Indicando con

n = numero circondamenti in senso orario

pc = numero poli a parte reale strettamente positiva, in catena chiusa

pd = numero poli a parte reale strettamente positiva, in catena diretta

si ha, per il criterio di Nyquist: $n = pc - pd$.

Circondando a destra (nel piano S) i poli complessi coniugati a parte reale nulla (come indicato in Figura 9), si ha che: $pd = 0$, quindi

$$n = pc$$

Sempre con riferimento alla Figura 9, si ha che $n = 2$, ovvero si hanno due circondamenti del punto $(-1, 0)$; quindi $pc = 2$.

Se ne deduce che il sistema chiuso in reazione unitaria ha due poli a parte reale strettamente positiva, ovvero il sistema chiuso in reazione unitaria NON è asintoticamente stabile!

Come verifica del risultato ottenuto, si studia la funzione di trasferimento in catena chiusa:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{s(s+10)(s-100)}{(s^2 + 110s + 10^4)(s^2 + 100) + s(s+10)(s-100)}$$

il cui denominatore è:

$$s^4 + 111s^3 + 10010s^2 + 10^4s + 10^6$$

Si costruisce la Tabella di Hurwitz:

4	1	10010	10^6	dalla quale si riscontrano 2 variazioni di segno (nella
3	111	10^4	0	
2	$\frac{1101110}{111}$	10^6	0	
1	-1189.62	0	0	
0	10^6	0	0	

colonna Pivot), ovvero due radici a parte reale strettamente Positiva C.V.D.

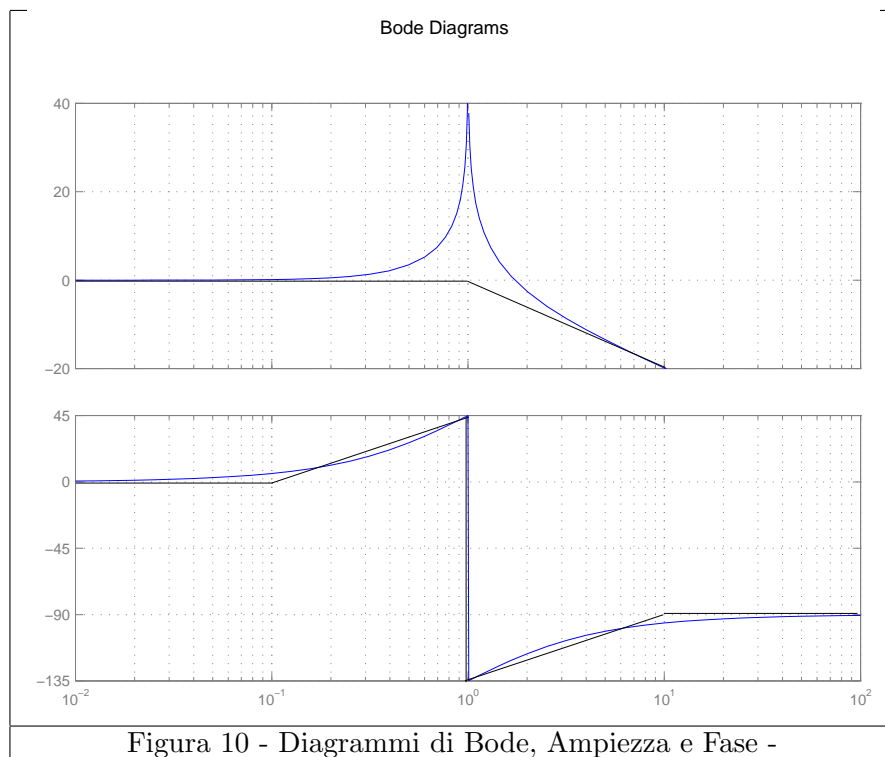
0.4

Data la funzione di trasferimento:

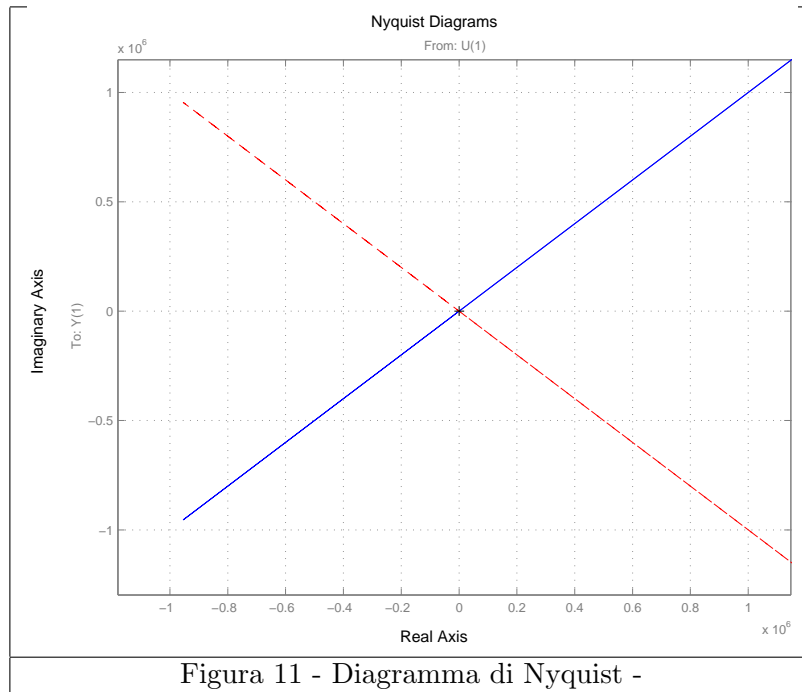
$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

essa risulta già essere in forma di Bode. Si noti che tale f.d.t. presenta due poli complessi coniugati a parte reale nulla, con frequenza di taglio $\omega_n = 1$ (rad/s) e fattore di smorzamento $\xi = 0$.

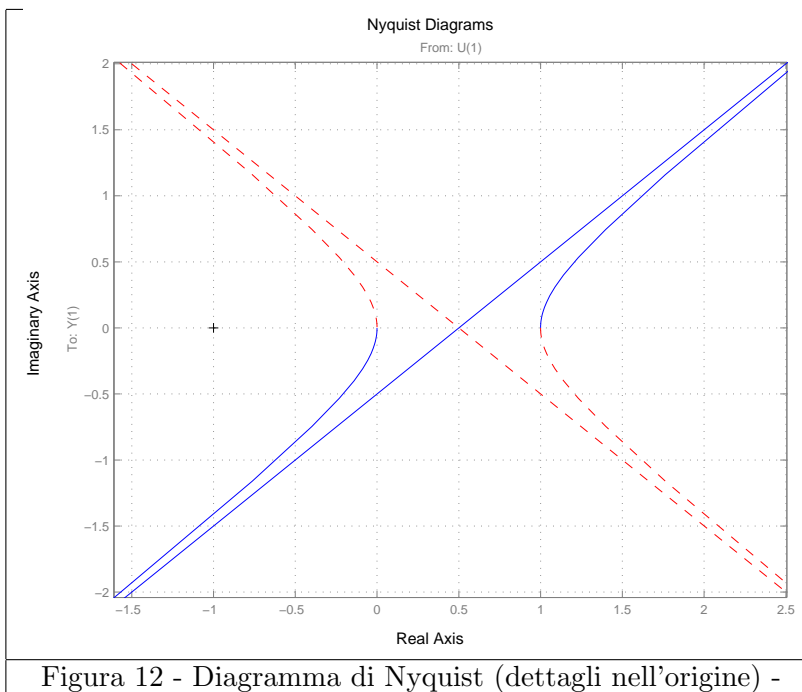
I relativi diagrammi di Bode sono i seguenti:



Con l'ausilio dei diagrammi di Bode si traccia il diagramma di Nyquist:

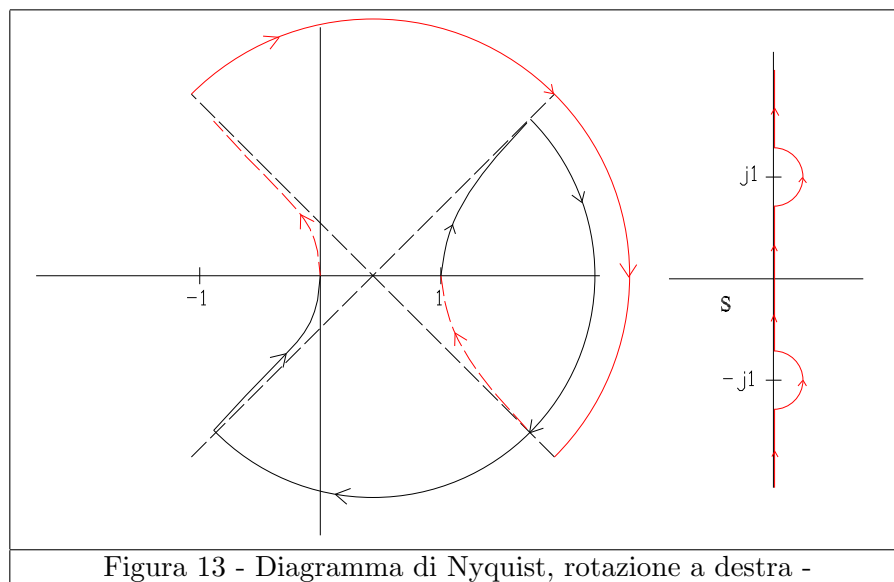


E' conveniente incrementare il dettaglio in un intorno dell'origine:



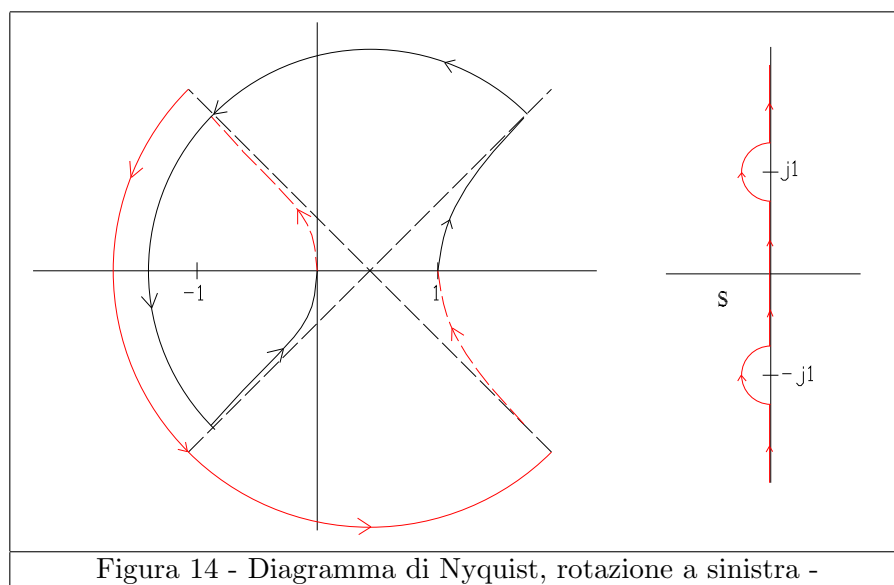
Per la presenza del fattore di smorzamento nullo (poli complessi coniugati a parte reale nulla), il diagramma di Nyquist non è chiuso, ma asintotico, quindi, per poter applicare il criterio di Nyquist, è necessario effettuare la chiusura all'infinito. Si effettuano tre studi separati per verificare la generalità del criterio di Nyquist:

1. Con rotazione a destra in senso antiorario



Il numero di circondamenti del punto critico $(-1,0)$ è 0, ovvero non ci sono circondamenti, il sistema chiuso in reazione unitaria risulta asintoticamente stabile.

2. Con rotazione a sinistra in senso orario



Con la solita convenzione:

n = numero circondamenti in senso orario

pc = numero poli a parte reale strettamente positiva, in catena chiusa

pd = numero poli a parte reale strettamente positiva, in catena diretta

si ha:

$$n = -2 \quad (\text{vi sono due circondamenti in senso Antiorario})$$

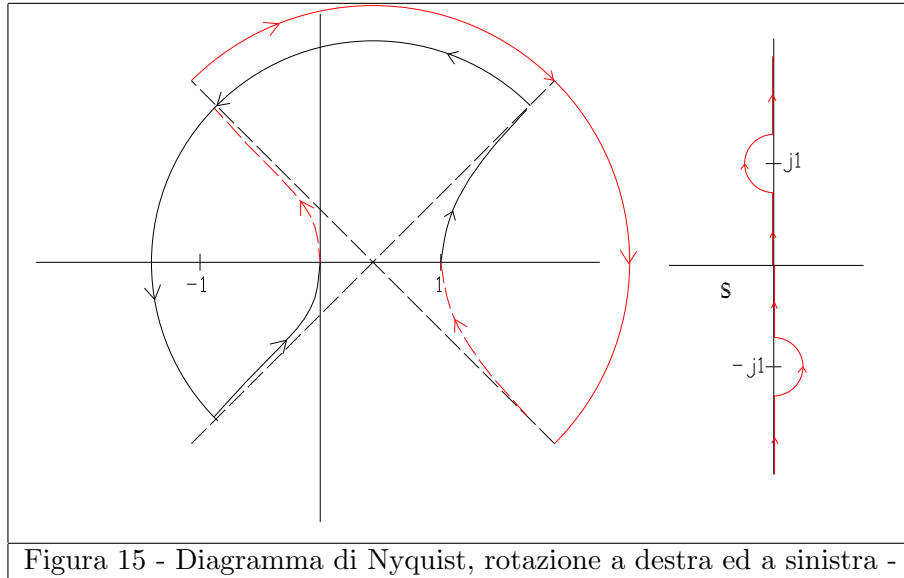
$pd = 2$ (ruotando a sinistra, i poli in c.diretta risultano a parte reale positiva)

e quindi

$$-2 = pc - 2 \Rightarrow pc = 0$$

Naturalmente anche in questo caso, si ottiene che il sistema chiuso in reazione unitaria è asintoticamente stabile.

3. Con rotazione a destra ed a sinistra.



In questo caso si ha:

$$n = -1 \quad (\text{un circondamento in senso antiorario})$$

$$pd = 1 \quad (\text{dovuto alla rotazione a sinistra del polo } +j1)$$

$$-1 = pc - 1 \Rightarrow pc = 0$$

Ancora una volta, si ottiene che il sistema chiuso in reazione unitaria è asintoticamente stabile.

Per ulteriore verifica si effettua lo studio della funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + s + 2}$$

Essendo il denominatore, un polinomio di secondo grado, si ha, per il criterio di Routh che i poli sono a parte reale strettamente negativa, e quindi il sistema chiuso in reazione unitaria è asintoticamente stabile.